Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Probabilités – Statistique

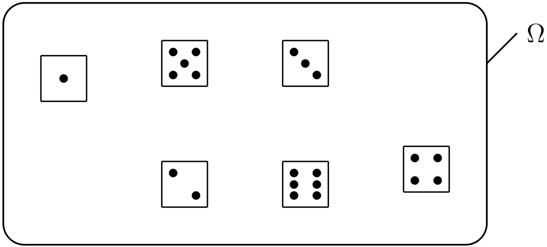
Printemps 2022

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

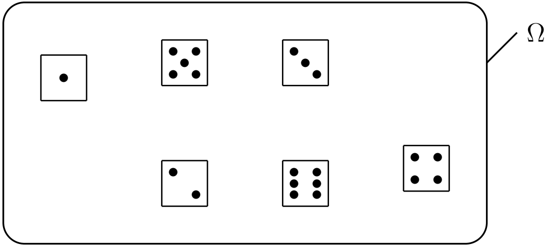
Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé



Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé

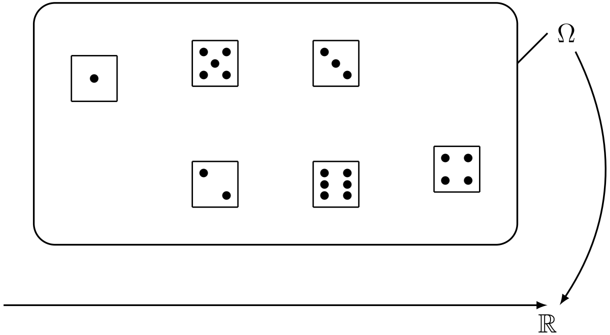


Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & X = f(\omega) \end{array}$$

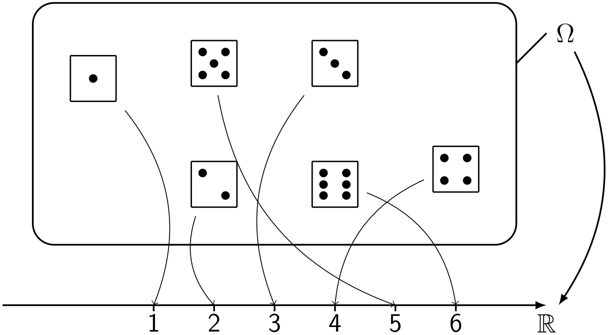
X est une *variable aléatoire*.



Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé

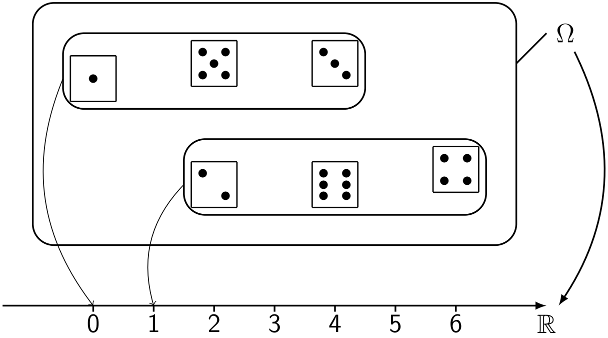
$$X = f(\omega) = \text{Nombre de points}$$



Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé

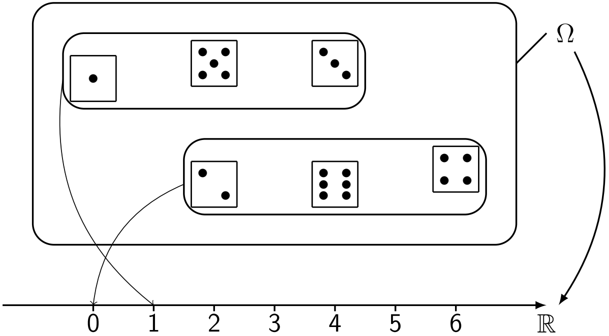
$$X = f(\omega) = \mathbb{1}_{\{\text{⚁},\text{⚃},\text{⚅}\}}(\omega)$$



Variables aléatoires

Résultat d'un lancer de dé

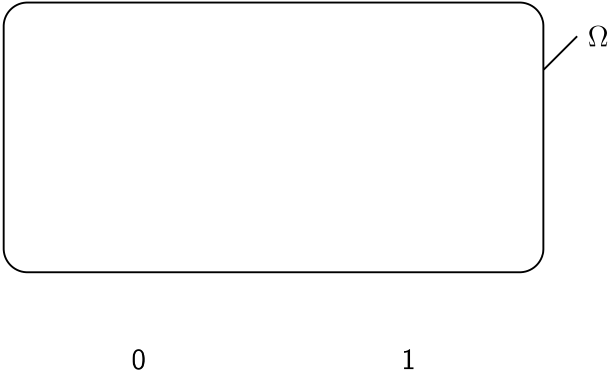
$$X = f(\omega) = \mathbb{1}_{\{⚀,⚂,⚄\}}(\omega)$$



Épreuve de Bernoulli

Deux résultats possibles

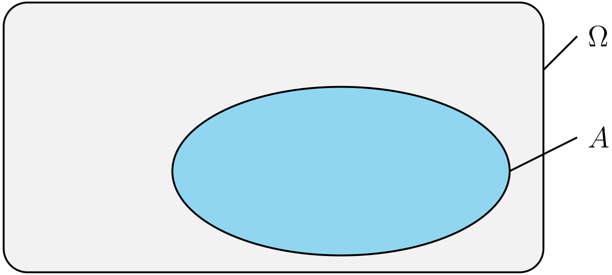
$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \end{array}$$



Épreuve de Bernoulli

Deux résultats possibles

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0, 1\} \end{array}$$

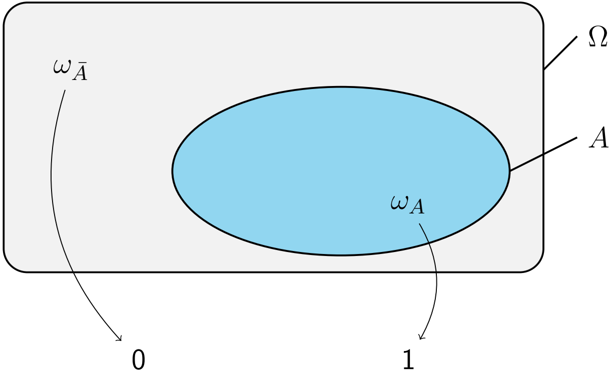


0 1

Épreuve de Bernoulli

Deux résultats possibles

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & X = \mathbb{1}_A(\omega) \end{array}$$

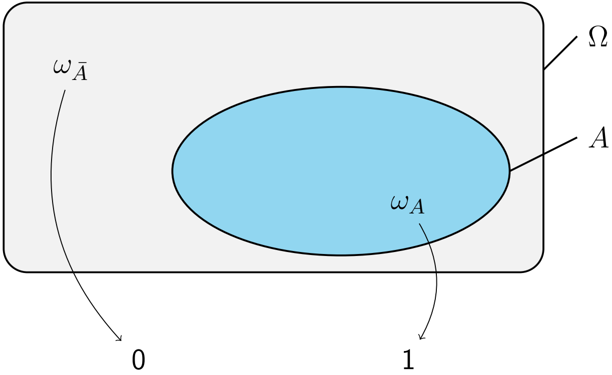


Épreuve de Bernoulli

Deux résultats possibles

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & X = \mathbb{1}_A(\omega) \end{array}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A)$$



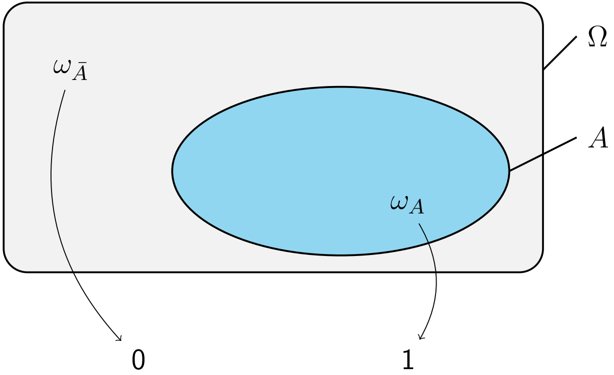
Épreuve de Bernoulli

Deux résultats possibles

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \{0,1\} \\ \omega & \longmapsto & X = \mathbb{1}_A(\omega) \end{array}$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A)$$

Succès / Échec



Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives

Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives
  - Discrètes : Nombre de descendants, nombre de différences dans une séquence. . .

Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives
  - Discrètes : Nombre de descendants, nombre de différences dans une séquence...
  - Continues : Taille, Masse...

Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives
  - Discrètes : Nombre de descendants, nombre de différences dans une séquence...
  - Continues : Taille, Masse...
- Variables aléatoires qualitatives

Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives
  - Discrètes : Nombre de descendants, nombre de différences dans une séquence...
  - Continues : Taille, Masse...
- Variables aléatoires qualitatives
  - Ordonnées. Ex. taille exprimée en "petit, grand, moyen"

Types de V.A.

- Variables aléatoires quantitatives
  - Discrètes : Nombre de descendants, nombre de différences dans une séquence...
  - Continues : Taille, Masse...
- Variables aléatoires qualitatives
  - Ordonnées. Ex. taille exprimée en "petit, grand, moyen"
  - Non ordonnées. Ex. sexe, motif d'un pelage : rayé, tacheté, uni...

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.
- Ω est l'univers des possibles pour cette épreuve.

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.
- Ω est l'univers des possibles pour cette épreuve.
- ω est l'événement élémentaire réalisé à l'issue de l'épreuve.

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.
- Ω est l'univers des possibles pour cette épreuve.
- ω est l'événement élémentaire réalisé à l'issue de l'épreuve.
- X est une variable aléatoire définie d'après ω.

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.
- Ω est l'univers des possibles pour cette épreuve.
- ω est l'événement élémentaire réalisé à l'issue de l'épreuve.
- X est une variable aléatoire définie d'après ω.
- La valeur de X à l'issue de l'épreuve est la "réalisation" de la V.A.

Notation / vocabulaire

- On définit une *épreuve aléatoire*.
- Ω est l'univers des possibles pour cette épreuve.
- ω est l'événement élémentaire réalisé à l'issue de l'épreuve.
- X est une variable aléatoire définie d'après ω.
- La valeur de X à l'issue de l'épreuve est la "réalisation" de la V.A.
- La probabilité que la réalisation de X soit x est notée $\mathbb{P}(X = x)$.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.
- X est le nombre de lettres du prénom de l'étudiant.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.
- X est le nombre de lettres du prénom de l'étudiant.
- Y est le dernier chiffre de la somme des chiffres du numéro d'étudiant.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.
- X est le nombre de lettres du prénom de l'étudiant.
- Y est le dernier chiffre de la somme des chiffres du numéro d'étudiant.
- $\omega =$Laura est inscrit(e) en séquence 2.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.
- X est le nombre de lettres du prénom de l'étudiant.
- Y est le dernier chiffre de la somme des chiffres du numéro d'étudiant.
- $\omega =$Laura est inscrit(e) en séquence 2.
- $X = 5$.

Exemple

- Épreuve : Choisir un étudiant inscrit à l'UE.
- Ω est l'ensemble des étudiants de l'UE.
- X est le nombre de lettres du prénom de l'étudiant.
- Y est le dernier chiffre de la somme des chiffres du numéro d'étudiant.
- $\omega =$Laura est inscrit(e) en séquence 2.
- $X = 5$.
- La somme des chiffres du numéro d'étudiant de Laura est 20 donc $Y =$0

Exemple

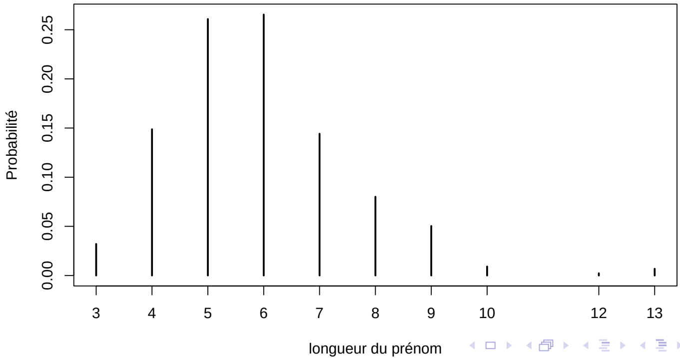
Si on fait les mêmes calculs pour l'ensemble des 437 étudiants inscrits en MathSV, on obtient les effectifs suivants

$$X : \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 65 \\ 5 & 114 \\ 6 & 116 \\ 7 & 63 \\ 8 & 35 \\ 9 & 22 \\ 10 & 4 \\ 12 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemple

Si on fait les mêmes calculs pour l'ensemble des 437 étudiants inscrits en MathSV, on obtient les effectifs suivants

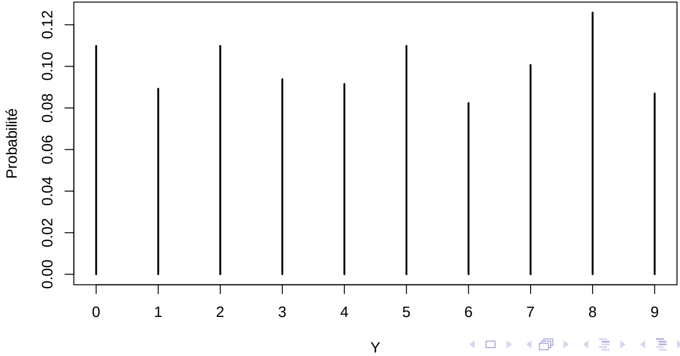
$$X : \begin{bmatrix} 3 & 14 \\ 4 & 65 \\ 5 & 114 \\ 6 & 116 \\ 7 & 63 \\ 8 & 35 \\ 9 & 22 \\ 10 & 4 \\ 12 & 1 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$$



Exemple

Si on fait les mêmes calculs pour l'ensemble des 437 étudiants inscrits en MathSV, on obtient les effectifs suivants

$$Y : \begin{bmatrix} 0 & 48 \\ 1 & 39 \\ 2 & 48 \\ 3 & 41 \\ 4 & 40 \\ 5 & 48 \\ 6 & 36 \\ 7 & 44 \\ 8 & 55 \\ 9 & 38 \end{bmatrix}$$

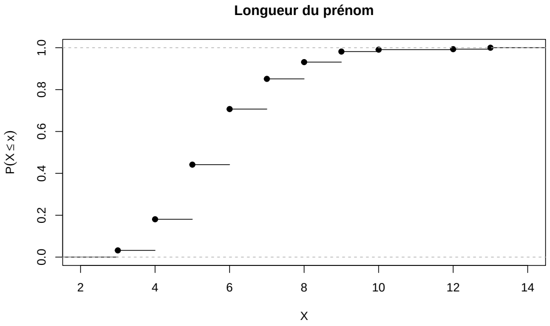


Distribution d'une variable aléatoire discrète

- La fonction de probabilité de X est $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.

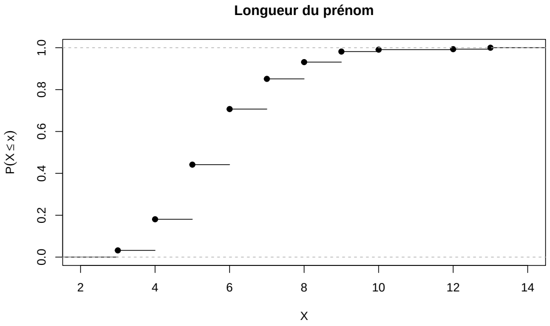
Distribution d'une variable aléatoire discrète

- La fonction de probabilité de X est $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- La fonction de répartition de X est $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$



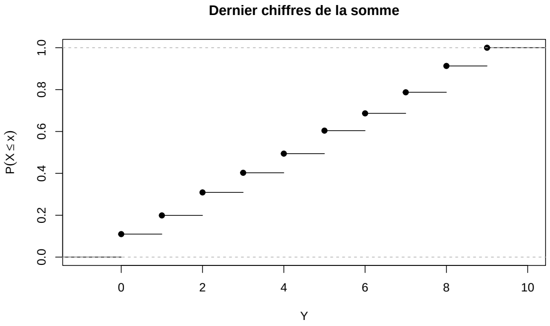
Distribution d'une variable aléatoire discrète

- La fonction de probabilité de X est $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- La fonction de répartition de X est $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$
- Pour une V.A. discrète, F est discontinue à toutes les valeurs que peut prendre X



Distribution d'une variable aléatoire discrète

- La fonction de probabilité de X est $f(x) = \mathbb{P}(X = x)$.
- La fonction de répartition de X est $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$
- Pour une V.A. discrète, F est discontinue à toutes les valeurs que peut prendre X



Fonction de répartition F

Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble ordonné des valeurs que peut prendre X.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

Fonction de répartition F

Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble ordonné des valeurs que peut prendre X.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

Fonction de répartition F

Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble ordonné des valeurs que peut prendre X.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to x_i^-} F(x) = F(x_{i-1})$$

Fonction de répartition F

Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble ordonné des valeurs que peut prendre X.

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to x_i^-} F(x) = F(x_{i-1}) \qquad \lim_{x \to x_i^+} F(x) = F(x_{i-1}) + \mathbb{P}(X = x_i)$$

Espérance d'une V.A. discrète

- Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.

Espérance d'une V.A. discrète

- Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- L'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

Espérance d'une V.A. discrète

- Soit X une V.A. discrète et $\{x_i\}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
- L'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i)$$

- L'espérance est la valeur moyenne de X

Exemple : Nombre de lettres du prénom des étudiants de MathSV

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 3 \times \frac{14}{437} + 4 \times \frac{65}{437} + 5 \times \frac{114}{437} + 6 \times \frac{116}{437} + 7 \times \frac{63}{437} + 8 \times \frac{35}{437} \\ &\quad + 9 \times \frac{22}{437} + 10 \times \frac{4}{437} + 12 \times \frac{1}{437} + 13 \times \frac{3}{437} \\ &= 5.8993135\end{aligned}$$

Exemple : Dernier chiffre

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= 0 \times \frac{48}{437} + 1 \times \frac{39}{437} + 2 \times \frac{48}{437} + 3 \times \frac{41}{437} + 4 \times \frac{40}{437} + 5 \times \frac{48}{437} \\ &\quad + 6 \times \frac{36}{437} + 7 \times \frac{44}{437} + 8 \times \frac{55}{437} + 9 \times \frac{38}{437} \\ &= 4.4942792\end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu$

X est une v.a. λ et μ sont deux constantes réelles.

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \sum_i (\lambda x_i + \mu)\, \mathbb{P}(X = x_i)$$

Propriétés de l'espérance : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu$

X est une v.a. λ et μ sont deux constantes réelles.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\lambda X + \mu) &= \sum_i (\lambda x_i + \mu)\,\mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_i (\lambda x_i \mathbb{P}(X = x_i)) + \sum_i (\mu \mathbb{P}(X = x_i))\end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu$

X est une v.a. λ et μ sont deux constantes réelles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda X + \mu) &= \sum_i (\lambda x_i + \mu)\, \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_i (\lambda x_i \mathbb{P}(X = x_i)) + \sum_i (\mu \mathbb{P}(X = x_i)) \\
&= \lambda \sum_i (x_i \mathbb{P}(X = x_i)) + \mu \sum_i (\mathbb{P}(X = x_i))
\end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance : $\mathbb{E}(\lambda X + \mu) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu$

X est une v.a. λ et μ sont deux constantes réelles.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\lambda X + \mu) &= \sum_i (\lambda x_i + \mu)\, \mathbb{P}(X = x_i) \\
&= \sum_i (\lambda x_i \mathbb{P}(X = x_i)) + \sum_i (\mu \mathbb{P}(X = x_i)) \\
&= \lambda \sum_i (x_i \mathbb{P}(X = x_i)) + \mu \sum_i (\mathbb{P}(X = x_i)) \\
&= \lambda \mathbb{E}(X) + \mu
\end{aligned}$$

Propriétés de l'espérance : $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

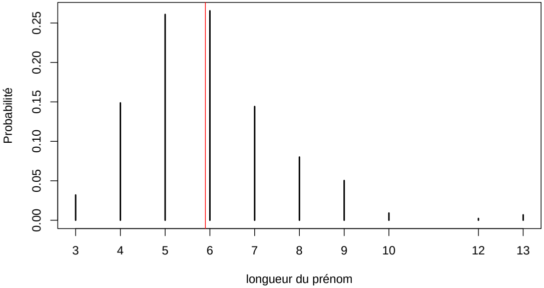
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X+Y) &= \sum_{x_i}\sum_{y_j}(x_i+y_j)\mathbb{P}(X=x_i \cap Y=y_j) \\
&= \sum_{x_i}\sum_{y_j}(x_i+y_j)\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i) \\
&= \sum_{x_i}\sum_{y_j}\left(x_i\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i) + y_j\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)\right) \\
&= \left(\sum_{x_i}\sum_{y_j}x_i\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)\right) + \left(\sum_{x_i}\sum_{y_j}y_j\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)\right) \\
&= \left(\sum_{x_i}x_i\mathbb{P}(X=x_i)\underbrace{\sum_{y_j}\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)}_{=1}\right) + \left(\sum_{y_j}y_j\underbrace{\sum_{x_i}\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j|X=x_i)}_{=\mathbb{P}(Y=y_j)}\right)
\end{aligned}$$

Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

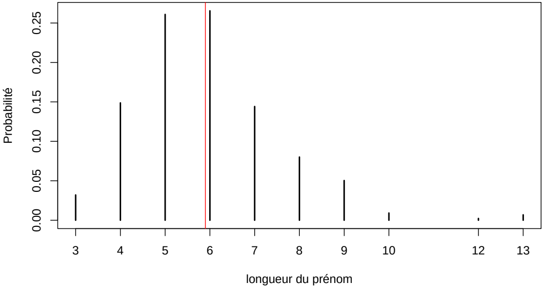
$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$



Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

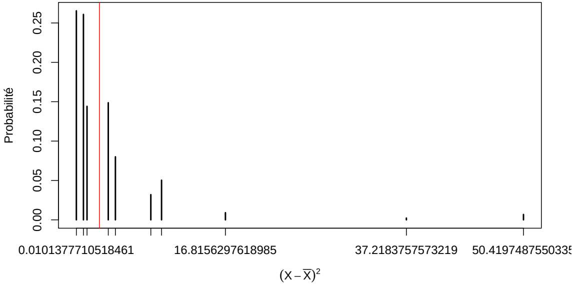
- $V(X) = 2.62$



Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

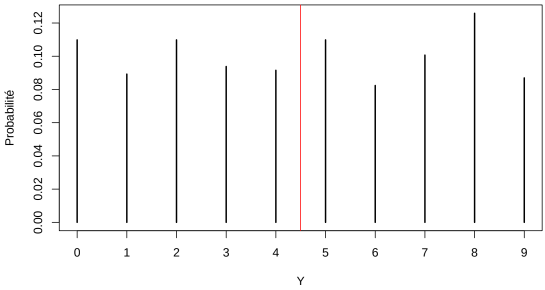
- $V(X) = 2.62$



Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

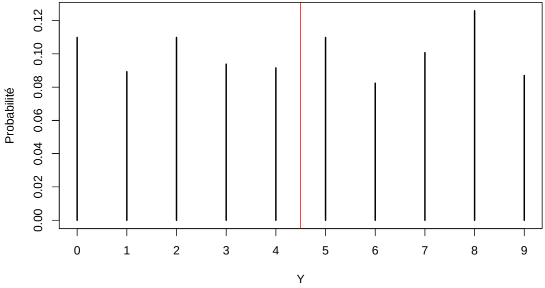
- $V(X) = 2.62$



Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

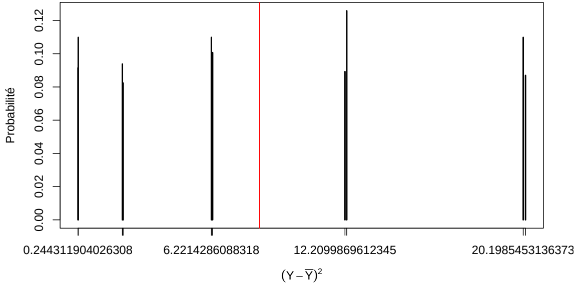
- $V(X) = 2.62$



Dispersion : variance d'une variable aléatoire discrète

$$V(X) = \mathbb{E}\left(\left(X - \mathbb{E}(X)\right)^2\right)$$

- $V(X) = 2.62$
- $V(Y) = 8.38$



Propriétés de la variance $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(X^2 + \mathbb{E}(X)^2 - 2X\mathbb{E}(X)) \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X\mathbb{E}(X)) \\
&= \mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) \\
&= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2
\end{aligned}$$

Propriétés de la variance $\mathbb{V}(\lambda X) = \lambda^2\mathbb{V}(X)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(\lambda X) &= \mathbb{E}((\lambda X - \mathbb{E}(\lambda X))^2) \\
&= \mathbb{E}((\lambda X - \lambda\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}(\lambda^2(X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \lambda^2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \\
&= \lambda^2\mathbb{V}(X)
\end{aligned}
$$

Propriétés de la variance $\mathbb{V}(X+\mu)=\mathbb{V}(X)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+\mu) &= \mathbb{E}((X+\mu-\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{E}((X+\mu-\mathbb{E}(X)-\mu)^2) \\
&= \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \\
&= \mathbb{V}(X)
\end{aligned}$$

Propriété : $\mathbb{V}(X+Y)$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{V}(X+Y) &= \mathbb{E}\left(((X+Y-\mathbb{E}(X+Y))^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left(((X-\mathbb{E}(X))+(Y-\mathbb{E}(Y)))^2\right)\\
&= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2+(Y-\mathbb{E}(Y))^2+2\,(X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y))\right)\\
&= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)+\mathbb{E}\left((Y-\mathbb{E}(Y))^2\right)+\mathbb{E}\,(2\,(X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y\\
&= \mathbb{V}\,(X)+\mathbb{V}\,(Y)+2\,\underbrace{\mathbb{E}\,((X-\mathbb{E}(X))\,(Y-\mathbb{E}(Y)))}_{\mathrm{Cov}(X,Y)}
\end{aligned}
$$

$$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}\,(X)+\mathbb{V}\,(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

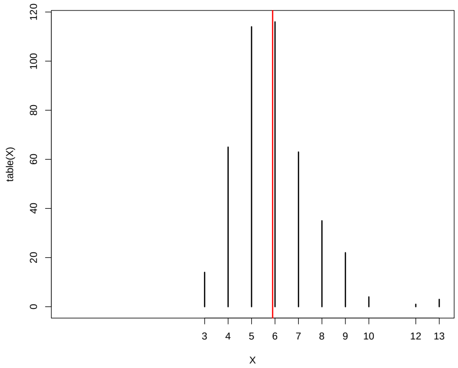
Propriété : $\mathbb{V}(X+Y)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))\left(Y-\mathbb{E}(Y)\right)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(XY - Y\mathbb{E}(X) - X\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}\left(Y\mathbb{E}(X)\right) - \mathbb{E}\left(X\mathbb{E}(Y)\right) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}\left(XY\right) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X)
\end{aligned}$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

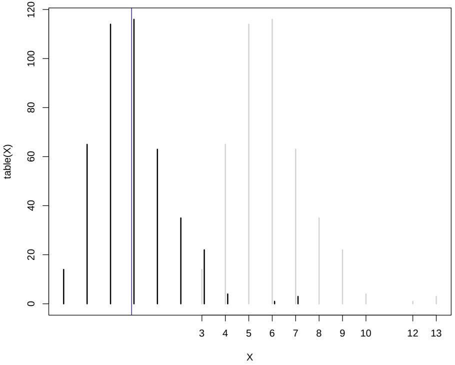
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$



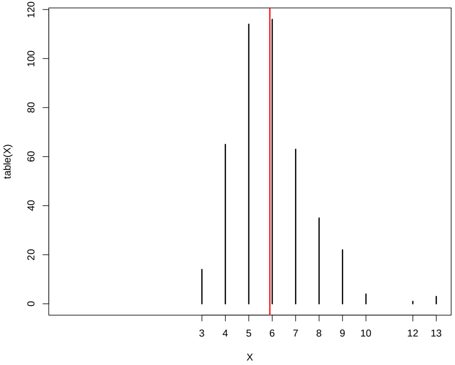
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.



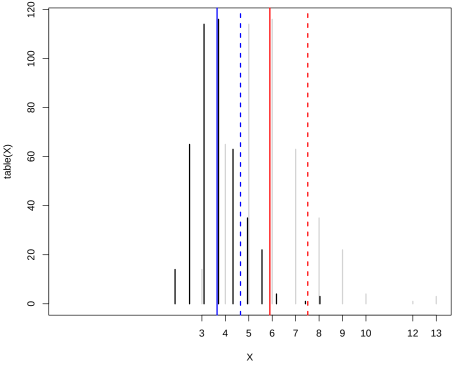
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- S est réduite $\Leftrightarrow \mathbb{V}(S) = 1$.



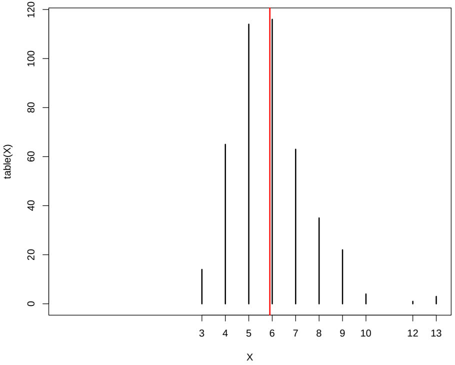
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- S est réduite $\Leftrightarrow \mathbb{V}(S) = 1$.
- $S = \dfrac{X}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ est est réduite.



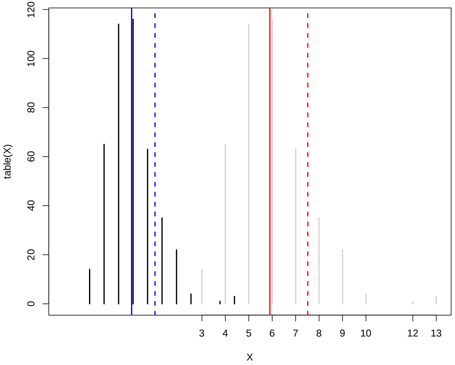
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- S est réduite $\Leftrightarrow \mathbb{V}(S) = 1$.
- $S = \frac{X}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ est est réduite.
- $Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ centrée-réduite.



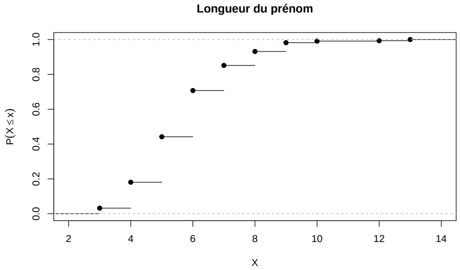
VA. centrée

- Y est centrée $\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est centrée.
- S est réduite $\Leftrightarrow \mathbb{V}(S) = 1$.
- $S = \frac{X}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ est est réduite.
- $Z = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}$ centrée-réduite.



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles. . .

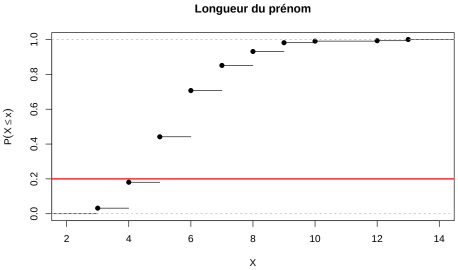
- Fonction réciproque de la fonction de répartition



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles...

- Fonction réciproque de la fonction de répartition
- Discontinue pour les V.A. discrètes

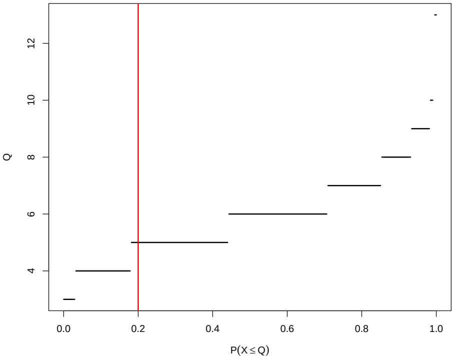
$$\text{fractile}_X(p) = \sup\left(\{x_i | p \leqslant F(x_i)\}\right)$$



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles. . .

- Fonction réciproque de la fonction de répartition
- Discontinue pour les V.A. discrètes

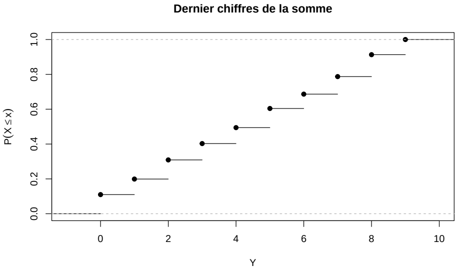
$$\text{fractile}_X(p) = \sup\left(\{x_i | p \leqslant F(x_i)\}\right)$$



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles. . .

- Fonction réciproque de la fonction de répartition
- Discontinue pour les V.A. discrètes

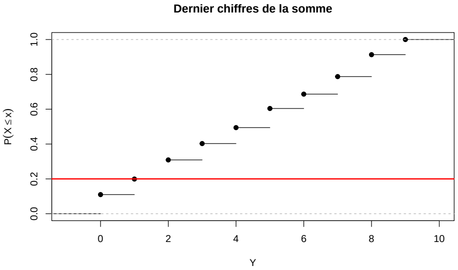
$$\text{fractile}_X(p) = \sup\left(\{x_i | p \leqslant F(x_i)\}\right)$$



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles. . .

- Fonction réciproque de la fonction de répartition
- Discontinue pour les V.A. discrètes

$$\text{fractile}_X(p) = \sup\left(\{x_i | p \leqslant F(x_i)\}\right)$$



Fractiles, percentiles, quartiles, quantiles. . .

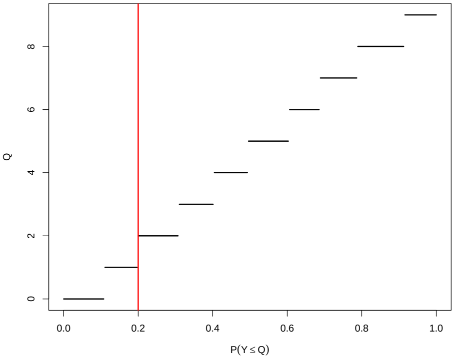
- Fonction réciproque de la fonction de répartition
- Discontinue pour les V.A. discrètes

$$\text{fractile}_X(p) = \sup\left(\{x_i | p \leqslant F(x_i)\}\right)$$

- Fonction continue pour les V.A. continues

$$\text{fractile}_X(p) = x | F(x) = p$$

Rappel : $F(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$

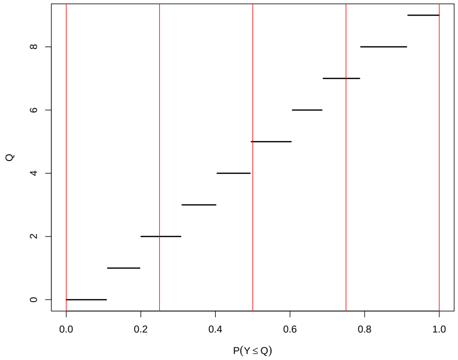


Quartiles

Les quartiles “partagent la distribution” en quatre classes de probabilité 0.25.
La médiane de la distribution est le deuxième quartile.
Pour les distributions discrètes les classes ont rarement une probabilité d’exactement 0.25

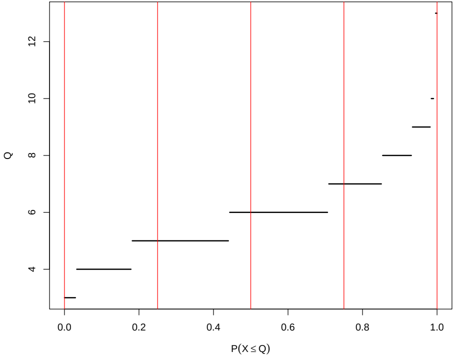
Quartiles

Les quartiles “partagent la distribution” en quatre classes de probabilité 0.25.
La médiane de la distribution est le deuxième quartile.
Pour les distributions discrètes les classes ont rarement une probabilité d’exactement 0.25



Quartiles

Les quartiles “partagent la distribution” en quatre classes de probabilité 0.25.
La médiane de la distribution est le deuxième quartile.
Pour les distributions discrètes les classes ont rarement une probabilité d’exactement 0.25



Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\text{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\mathrm{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\text{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$
  - Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\text{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$
  - Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$
- Lois continues

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\text{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$
  - Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$
- Lois continues
  - Loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\mathrm{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$
  - Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$
- Lois continues
  - Loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Loi t de Student : $t(\mathrm{ddl})$

Lois classiques

Ce sont les distributions qu'il vous faudra connaître

- Lois discrètes
  - Loi de Bernoulli : $\text{Bernoulli}(p) = \mathcal{B}(1, p)$
  - Loi Binomiale : $\mathcal{B}(n, p)$
  - Loi de Poisson : $\mathcal{P}(\lambda)$
- Lois continues
  - Loi Normale : $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
  - Loi t de Student : $t(\text{ddl})$
  - Loi de χ^2 : $\chi^2(\text{ddl})$

Loi de Bernoulli

Voir le début du cours :

- $X \in \{0, 1\}$

Loi de Bernoulli

Voir le début du cours :

- $X \in \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$

Loi de Bernoulli

Voir le début du cours :

- $X \in \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$
- $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

Loi de Bernoulli

Voir le début du cours :

- $X \in \{0, 1\}$
- $\mathbb{P}(X = 1) = p$
- $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$

Loi binomiale

$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ indépendantes entre elles.

- $X \in \{0, 1, \dots n\}$

Loi binomiale

$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $Y_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ indépendantes entre elles.

- $X \in \{0, 1, \dots n\}$
- La probabilité d'une séquence donnée $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = y_i)$

Loi binomiale

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i \text{ où } Y_i \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ indépendantes entre elles.}$$

- $X \in \{0, 1, \ldots n\}$
- La probabilité d'une séquence donnée $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = y_i)$
- n nombre total de V.A., k : nombre de succès. Il existe $\binom{n}{k}$ séquences de ce type.

Loi binomiale

$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ où $Y_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ indépendantes entre elles.

- $X \in \{0, 1, \ldots n\}$
- La probabilité d'une séquence donnée $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ est $\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = y_i)$
- n nombre total de V.A., k : nombre de succès. Il existe $\binom{n}{k}$ séquences de ce type.
- La loi binomiale est donc :

$$X \sim \mathcal{B}(n, p), \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Loi binomiale : propriétés

$$X \sim \mathcal{B}(n,p), \quad \mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

X est la somme de n VA indépendantes de Bernoulli de paramètre p $Y_1, \ldots Y_i$ donc

- $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(Y_i) = np$
- $\mathbb{E}(V) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(Y_i) = np(1-p)$

Loi binomiale : propriétés

Soient $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux V.A. indépendantes, alors

- X est la somme de n_1 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- Y est la somme de n_2 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- $X + Y$ est la somme de $n_1 + n_2$ VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p

Loi binomiale : propriétés

Soient $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux V.A. indépendantes, alors

- X est la somme de n_1 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- Y est la somme de n_2 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- $X + Y$ est la somme de $n_1 + n_2$ VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p

Loi binomiale : propriétés

Soient $X \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ deux V.A. indépendantes, alors

- X est la somme de n_1 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- Y est la somme de n_2 VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p
- $X + Y$ est la somme de $n_1 + n_2$ VA de Bernoulli indépendantes de paramètre p

Donc $(X + Y) \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Point calculettes

Dans une maternité naissent 100 enfants.

- Quelle est la probabilité qu'il soit né exactement 60 filles ?

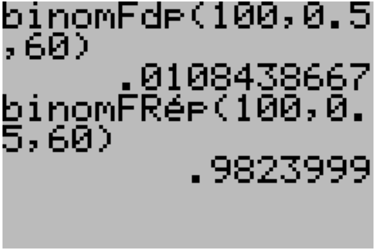
$$\mathbb{P}(X = 60) = \binom{100}{60} \left(\frac{1}{2}\right)^{60} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{40}$$

- Quelle est la probabilité qu'il soit né 60 filles ou moins ?

$$\mathbb{P}(X \geqslant 60) = \sum_{k=0}^{60} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{100-k}$$

Point calculettes : TI

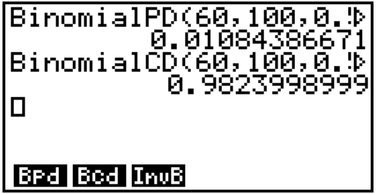
- Les lois de probabilités se trouvent dans le menu `distr`.
- `binomFdp` est la distribution, `binomFRép` est la fonction de répartition.
- L'ordre des arguments est n, p, k, où n et p sont les paramètres de $\mathcal{B}(n, p)$.



Point calculettes : casio

- Les lois de probabilités se trouvent dans le menu `STAT` puis `DIST`.
- `Bpd` est la distribution, `Bcd` est la fonction de répartition. `InvB` est la fonction des fractiles.
- L'ordre des arguments est k, n, p, où n et p sont les paramètres de $\mathcal{B}(n, p)$.

MENU 1
OPTN F5 F3 F5
F1 6 0 , 1 0 0 , 0 . 5
) EXE
F2 6 0 , 1 0 0 , 0 . 5
) EXE



Loi de Poisson

Loi du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (distance, surface, volume. . .) donné lorsque :

- Les événements sont indépendants entre eux.

Loi de Poisson

Loi du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (distance, surface, volume...) donné lorsque :

- Les événements sont indépendants entre eux.
- Le taux de survenue des événements est constant.

Loi de Poisson

Loi du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (distance, surface, volume...) donné lorsque :

- Les événements sont indépendants entre eux.
- Le taux de survenue des événements est constant.
- λ est le nombre moyen d'événements par unité de temps (...).

Loi de Poisson

Loi du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (distance, surface, volume...) donné lorsque :

- Les événements sont indépendants entre eux.
- Le taux de survenue des événements est constant.
- λ est le nombre moyen d'événements par unité de temps (...).

Loi de Poisson

Loi du nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (distance, surface, volume...) donné lorsque :

- Les événements sont indépendants entre eux.
- Le taux de survenue des événements est constant.
- λ est le nombre moyen d'événements par unité de temps (...).

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.
- Lorsque $n \to \infty$, le nombre d'événements durant un petit intervalle de temps est au plus 1.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.
- Lorsque $n \to \infty$, le nombre d'événements durant un petit intervalle de temps est au plus 1.
- Le nombre X_i d'événements dans l'intervalle i de durée $\frac{1}{n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.
- Lorsque $n \to \infty$, le nombre d'événements durant un petit intervalle de temps est au plus 1.
- Le nombre X_i d'événements dans l'intervalle i de durée $\frac{1}{n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$.
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de n V.A. de Bernoulli indépendantes. $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.
- Lorsque $n \to \infty$, le nombre d'événements durant un petit intervalle de temps est au plus 1.
- Le nombre X_i d'événements dans l'intervalle i de durée $\frac{1}{n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$.
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de n V.A. de Bernoulli indépendantes. $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

Durant une unité de temps, en moyenne λ événements surviennent.

- Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$ sur une unité de temps.
- On découpe l'unité de temps en n très petits intervalles de durée $\frac{1}{n}$.
- Lorsque $n \to \infty$, le nombre d'événements durant un petit intervalle de temps est au plus 1.
- Le nombre X_i d'événements dans l'intervalle i de durée $\frac{1}{n}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p_n = \frac{\lambda}{n}$.
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est une somme de n V.A. de Bernoulli indépendantes. $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

$$\mathcal{P}(X = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

D'où vient $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$?

On cherche la limite lorsque $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\left(\frac{n(n-1)\dots(n-k-1)}{n^k}\right)e^{(n-k)\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(\frac{n(n-1)\dots(n-k-1)}{n^k}\right)}_{\longrightarrow 1}\underbrace{e^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}}_{\longrightarrow e^{-\lambda}}\underbrace{e^{-k\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}}_{\longrightarrow 1}
\end{aligned}$$

Loi de Poisson : $\mathbb{E}(X) = \lambda$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\
&= \lambda \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{(l)!}}_{=1} = \lambda
\end{aligned}
$$

Loi de Poisson : $\mathbb{V}(X) = \lambda$

On calcule tout d'abord $\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, puis on calculera $\mathbb{V}(X^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!} = \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2} e^{-\lambda}}{(k-2)!} \\
&= \lambda^2 \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l e^{-\lambda}}{(l)!}}_{=1} = \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Loi de Poisson : Propriété

Soient $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ deux V.A. indépendantes.
Alors

- $\mathcal{P}(\lambda_1)$ est la loi d'un nombre d'événements de type A se produisant à un taux constant λ_1.
- $\mathcal{P}(\lambda_2)$ est la loi d'un nombre d'événements de type B se produisant à un taux constant λ_2.
- X et Y sont indépendantes.
- $(X+Y)$ suit la loi d'un nombre d'événements de type "A ou B" se produisant à un taux constant $\lambda_1 + \lambda_2$.

$$(X+Y) \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.

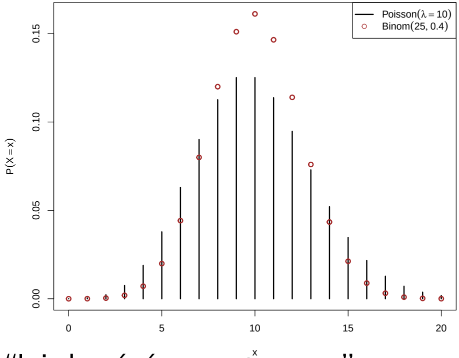
La loi de Poisson est parfois qualifiée de "loi des événements rares".

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.



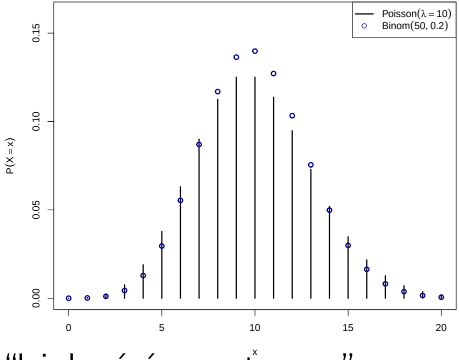
La loi de Poisson est parfois qualifiée de “loi des événements rares”.

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.



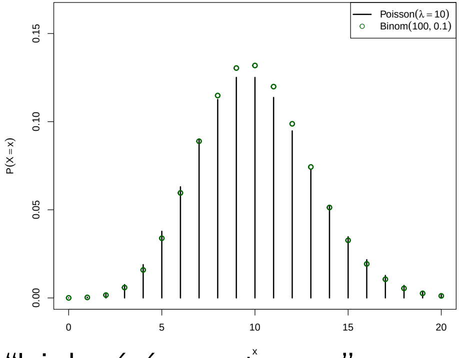
La loi de Poisson est parfois qualifiée de "loi des événements rares".

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.



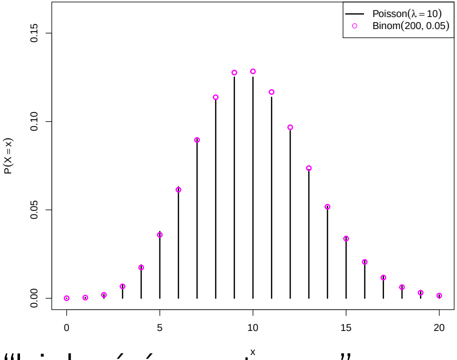
La loi de Poisson est parfois qualifiée de “loi des événements rares”.

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.



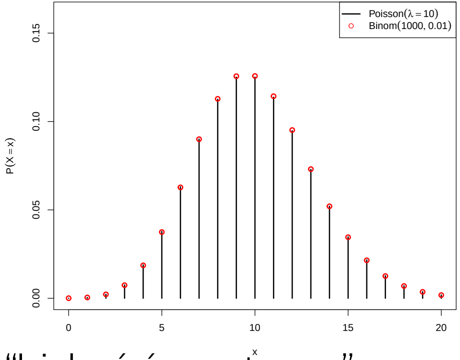
La loi de Poisson est parfois qualifiée de “loi des événements rares”.

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{P}(np)$

Lorsque $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et que les conditions suivantes sont remplies :

- n est grand
- np est petit

alors la loi de X converge $\mathcal{P}(np)$.



La loi de Poisson est parfois qualifiée de “loi des événements rares”.

Point calculettes

Dans une materternité naissent annuellement en moyenne 5 000 bébés. La trisomie 21 affecte environ une naissance sur 1 000.

- Quelle est la probabilité qu'une année naissent exactement deux enfants porteurs de trisomie 21 ?

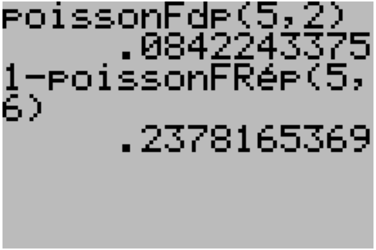
$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{5^2 e^{-5}}{5!}$$

- Quelle est la probabilité qu'une année naissent au moins 7 enfants porteurs de trisomie 21 ?

$$\mathbb{P}(X \geqslant 7) = 1 - \sum_{k=0}^{6} \frac{5^k e^{-5}}{k!}$$

Point calculettes : TI

- Les lois de probabilités se trouvent dans le menu `distr`.
- `poissonFdp` est la distribution, `poissonFRép` est la fonction de répartition.
- L'ordre des arguments est λ, k, où λ est le paramètre de $\mathcal{P}(\lambda)$.



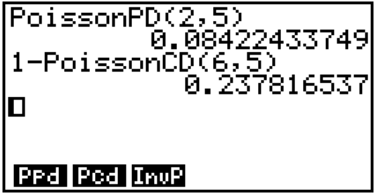
Point calculettes : casio

- Les lois de probabilités se trouvent dans le menu `STAT` puis `DIST`.
- `Ppd` est la distribution, `Pcd` est la fonction de répartition. `InvP` est la fonction des fractiles.
- L'ordre des arguments est k, λ, où λ est le paramètre de $\mathcal{P}(\lambda)$.

MENU 1
OPTN F5 F3 F6

F1 2 , 5) EXE

1 − F2 6 , 5) EXE



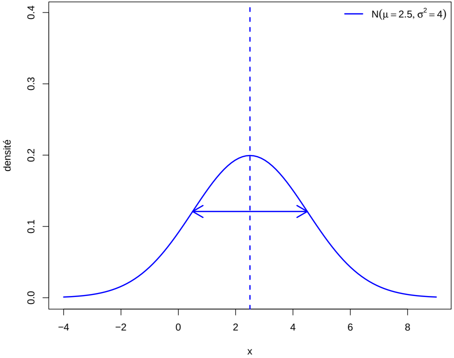
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



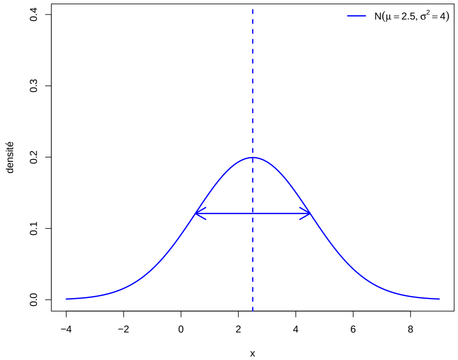
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Classiquement, les calculs se font à partir des tables de $\mathcal{N}(0, 1)$.

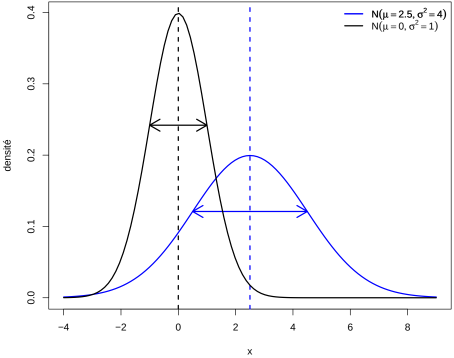
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Classiquement, les calculs se font à partir des tables de $\mathcal{N}(0, 1)$.

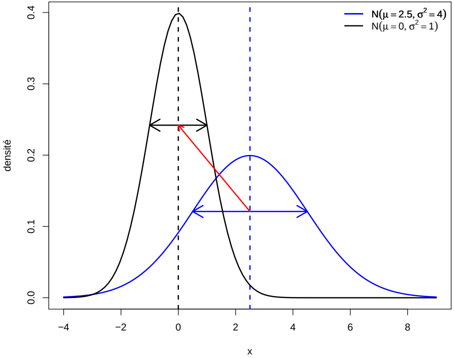
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Classiquement, les calculs se font à partir des tables de $\mathcal{N}(0, 1)$.

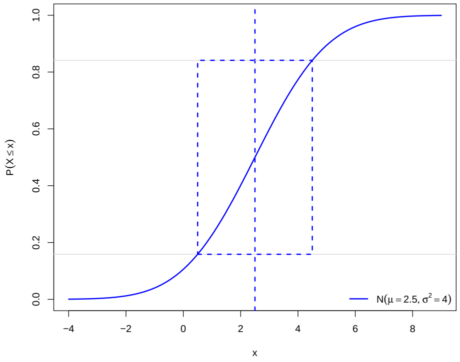
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Classiquement, les calculs se font à partir des tables de $\mathcal{N}(0, 1)$.

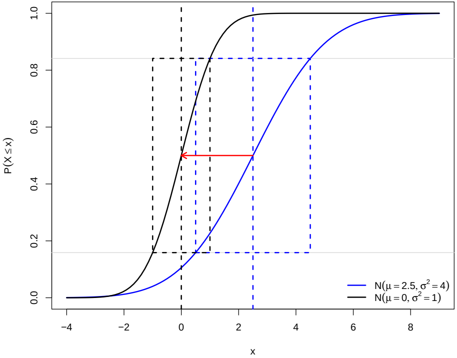
Loi normale

Loi continue définie par deux paramètres : sa moyenne μ et sa variance σ^2.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



Classiquement, les calculs se font à partir des tables de $\mathcal{N}(0, 1)$.

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

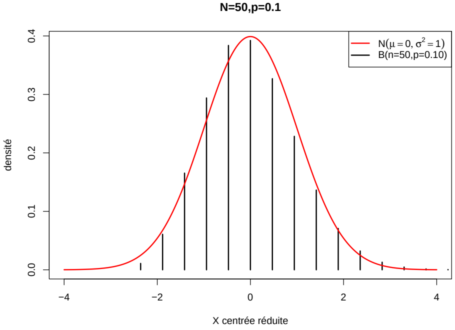
$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

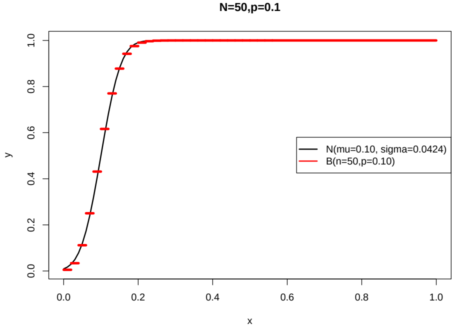
L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

Convergence $\mathcal{B}(n,p) \rightarrow \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

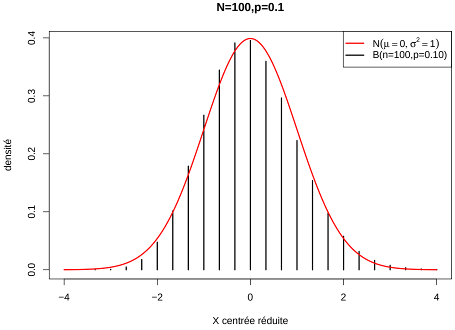


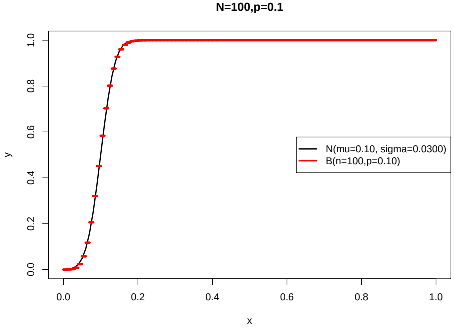


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

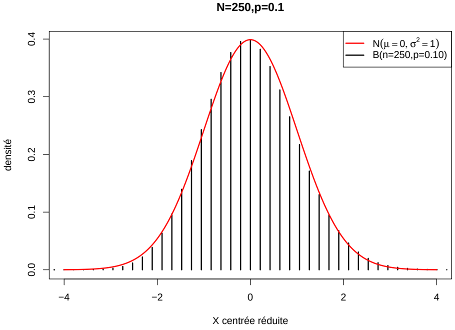


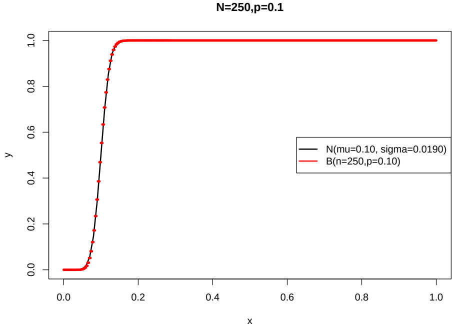


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

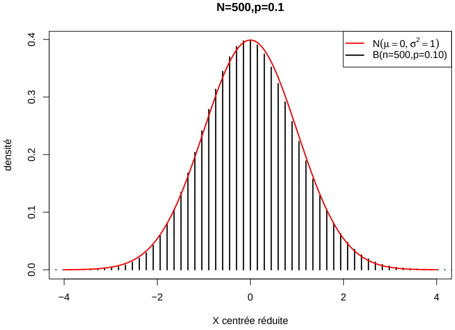


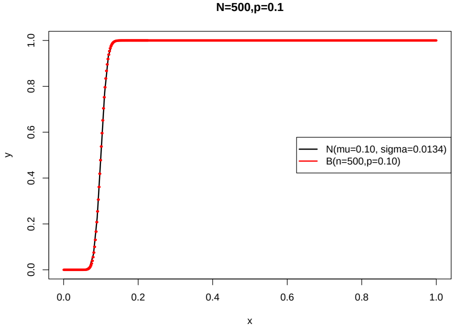


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

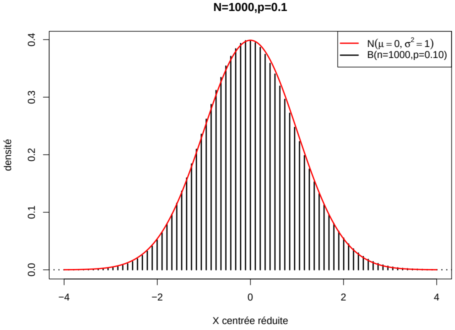


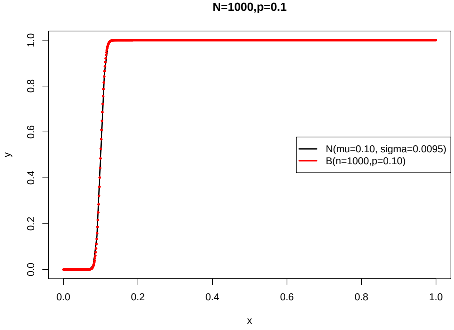


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

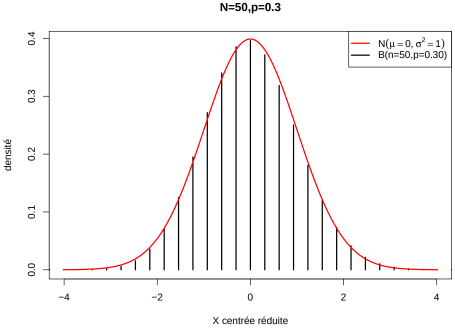


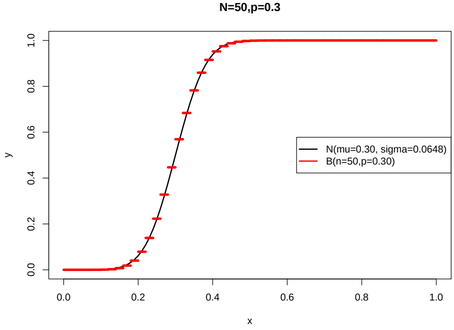


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

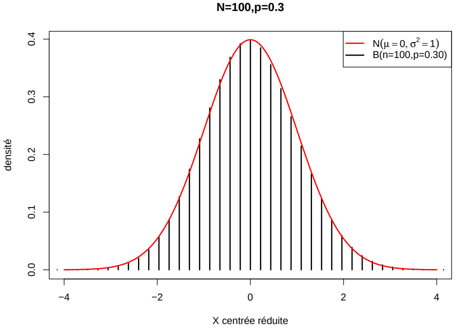


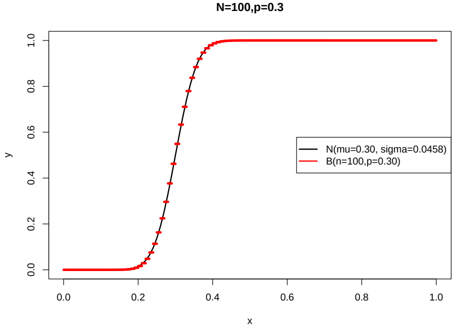


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

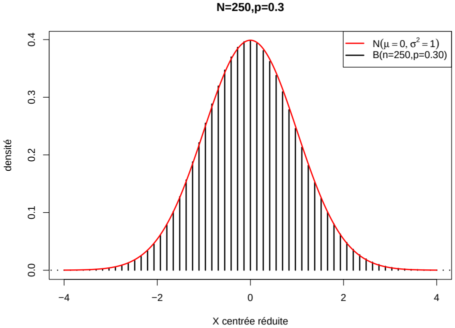


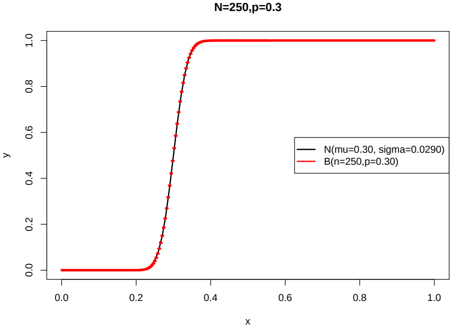


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

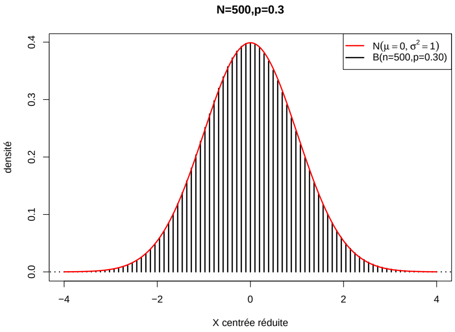


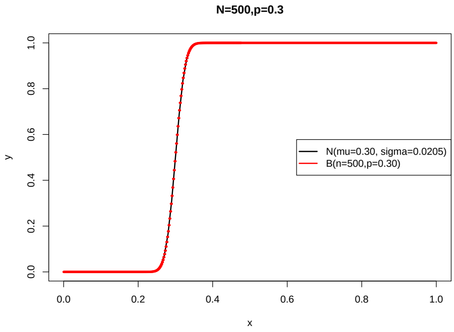


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.

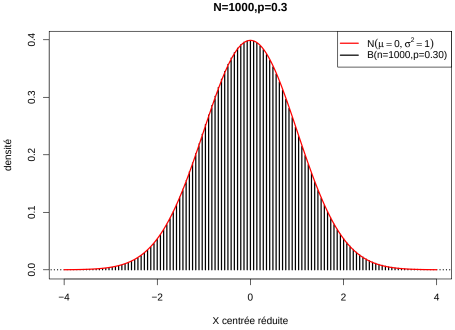


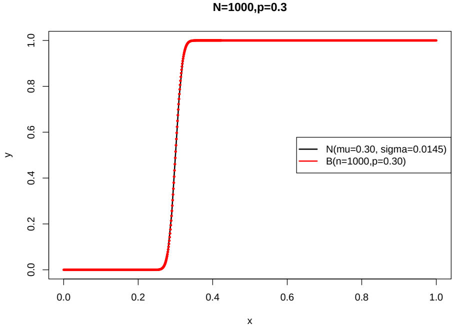


Convergence $\mathcal{B}(n,p) \to \mathcal{N}(\mu = np, \sigma^2 = np(1-p))$

$$X_n \sim \mathcal{B}(n,p) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

L'approximation est bonne pour np et $n(1-p)$ pas trop petits.





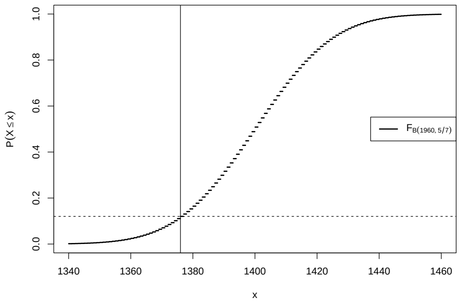
Exemple d'application, lecture des tables de la loi normale

Un élevage industriel compte $n = 1\,960$ poules pondeuses. La probabilité qu'une poule ponde durant une journée est $\frac{5}{7}$. On considère que les poules pondent indépendamment les unes des autres. Soit X le nombre d'œufs pondus durant une journée dans l'élevage.

- Quelle est la loi de X ?
- Donnez une approximation de $\mathbb{P}(X \leqslant 1\,376)$
- Les employés reçoivent une prime si le nombre d'œufs pondus est exceptionnellement élevé. Quel nombre minimum d'œufs faut-il choisir pour que la prime ne soit versée en moyenne qu'un jour sur 20 ?

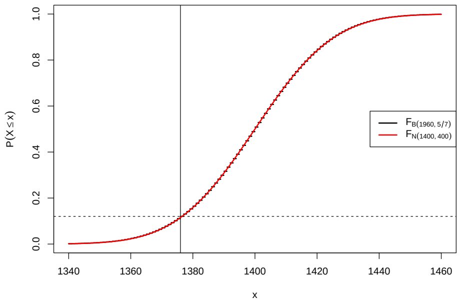
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.



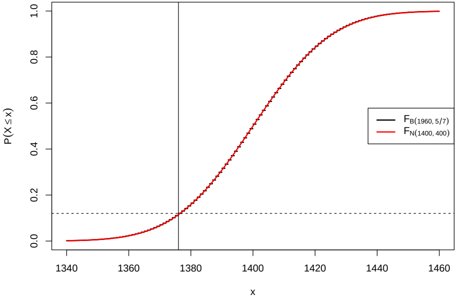
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$



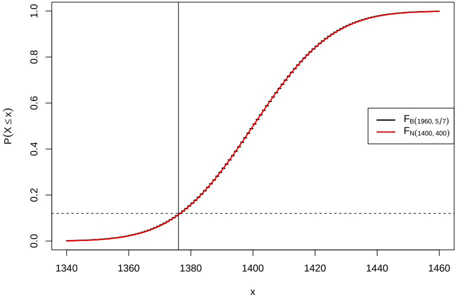
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$



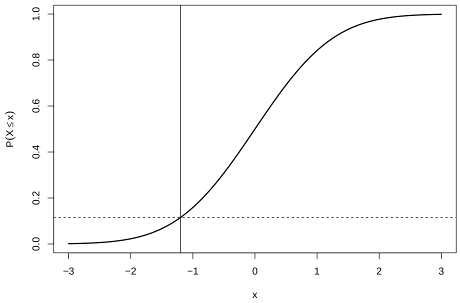
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$



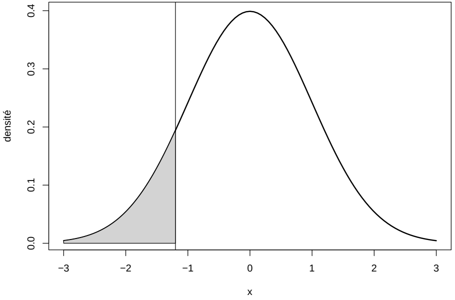
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$



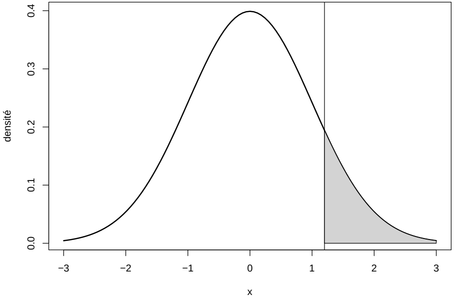
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\color{red}{\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2)} = \mathbb{P}(Z \geqslant 1.2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.



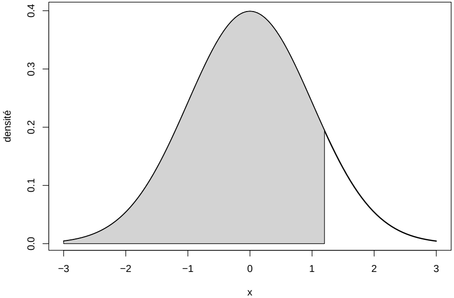
Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) = \color{red}{\mathbb{P}(Z \geqslant 1.2)} = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.



Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) = \mathbb{P}(Z \geqslant 1.2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.



Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) = \mathbb{P}(Z \ \geqslant 1.2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.
- On lit la valeur dans la table de la fonction de répartition pour $x = 1.2 + 0.00$.

Loi normale : table de la fonction $\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$.

La table donne les valeurs de $\Pi(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$\Pi(x)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981

Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) = \mathbb{P}(Z \geqslant 1.2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.
- On lit la valeur dans la table de la fonction de répartition pour $x = 1.2 + 0.00$.

Loi normale : table de la fonction $\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$.

La table donne les valeurs de $\Pi(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$\Pi(x)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981

Exemple d'application

- $X \sim \mathcal{B}\left(1960, \frac{5}{7}\right)$ $\mathbb{E}(X) = np = 1400$, $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = 400$.
- $X \sim \mathcal{N}(\mu = 1400, \sigma^2 = 400)$
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-1400}{20} \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \leqslant 1376 \Leftrightarrow Z \leqslant -1.2$
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) = \mathbb{P}(Z \ \geqslant 1.2) = 1 - \mathbb{P}(Z < 1.2)$.
- On lit la valeur dans la table de la fonction de répartition pour $x = 1.2 + 0.00$.
- $\mathbb{P}(Z \leqslant -1.2) \approx 1 - 0.8849 \approx 0.115$

Loi normale : table de la fonction $\Pi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \, du$.

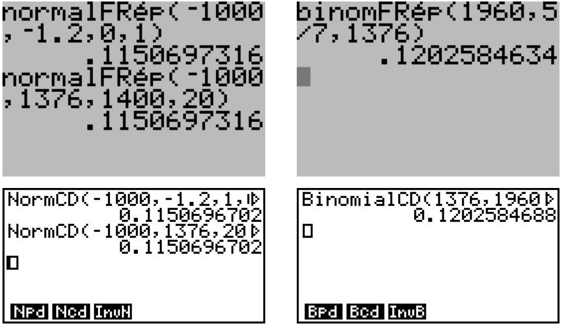
La table donne les valeurs de $\Pi(x)$ pour x positif. Lorsque x est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

x	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9
$\Pi(x)$	0.9772	0.9821	0.9861	0.9893	0.9918	0.9938	0.9953	0.9965	0.9974	0.9981

Avec vos calculatrices

- Loi normale : les calculatrices donnent $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b)$
  - TI : `normalFRép(a,b,`μ`,`σ`)`
  - casio : `NormCD(a,b,`σ`,`μ`)`
- Loi binomiale : les calculatrices donnent $\mathbb{P}(X \leqslant a)$
  - TI : `binomFRép(a,n,p)`
  - casio : `BinomialCD(an,p)`

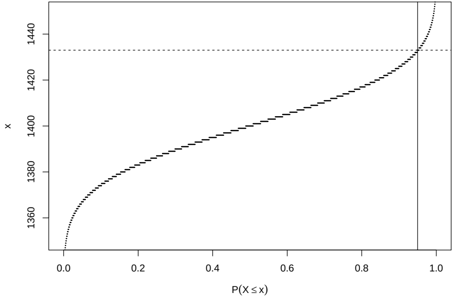


Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.

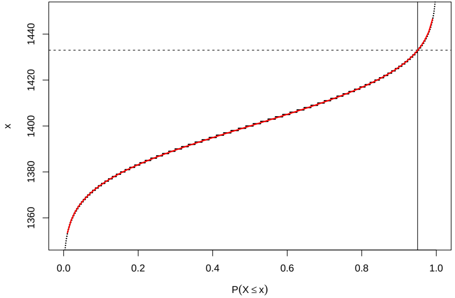
Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.



Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.



Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.

Loi normale : table de l'écart-réduit.

La table donne, pour une probabilité α, la valeur ε telle que la probabilité que l'écart-réduit égale ou dépasse en valeur absolue ε vaut α.

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.10	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.20	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.30	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.40	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.50	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.60	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.70	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.80	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.90	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

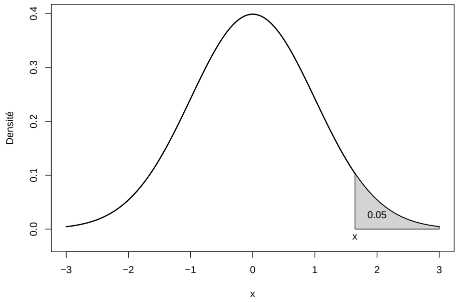
La probabilité α s'obtient par addition des nombres écrits en marge.
Exemple : pour $\alpha = 0.00 + 0.05 = 0.05$, $\varepsilon = 1.960$.

Table pour les petites valeurs de probabilité :

α	0.001	0.000 1	0.000 01	0.000 001	0.000 000 1	0.000 000 01	0.000 000 001
ε	3.29053	3.89059	4.41717	4.89164	5.32672	5.73073	6.10941

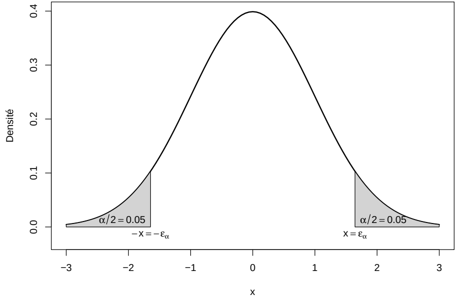
Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.



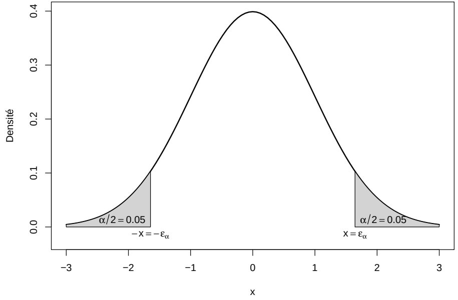
Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.
- Le $95^{\text{ème}}$ percentile correspond à $\alpha = 0.1$.



Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.
- Le $95^{\text{ème}}$ percentile correspond à $\alpha = 0.1$.



Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.
- Le $95^{\text{ème}}$ percentile correspond à $\alpha = 0.1$.
- On lit dans la table la valeur $\varepsilon_{0.1} = 1.645$.

Loi normale : table de l'écart-réduit.

La table donne, pour une probabilité α, la valeur ε telle que la probabilité que l'écart-réduit égale ou dépasse en valeur absolue ε vaut α.

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.10	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.20	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.30	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.40	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.50	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.60	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.70	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.80	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.90	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres écrits en marge.
Exemple : pour $\alpha = 0.00 + 0.05 = 0.05$, $\varepsilon = 1.960$.

Table pour les petites valeurs de probabilité :

α	0.001	0.000 1	0.000 01	0.000 001	0.000 000 1	0.000 000 01	0.000 000 001
ε	3.29053	3.89059	4.41717	4.89164	5.32672	5.73073	6.10941

Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.
- Le $95^{\text{ème}}$ percentile correspond à $\alpha = 0.1$.
- On lit dans la table la valeur $\varepsilon_{0.1} = 1.645$.
- La valeur correspondante est $x = 1400 + 20 \times 1.645 = 1432.9$.

Loi normale : table de l'écart-réduit.

La table donne, pour une probabilité α, la valeur ε telle que la probabilité que l'écart-réduit égale ou dépasse en valeur absolue ε vaut α.

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.10	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.20	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.30	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.40	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.50	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.60	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.70	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.80	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.90	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

La probabilité α s'obtient par addition des nombres écrits en marge.
Exemple : pour $\alpha = 0.00 + 0.05 = 0.05$, $\varepsilon = 1.960$.

Table pour les petites valeurs de probabilité :

α	0.001	0.000 1	0.000 01	0.000 001	0.000 000 1	0.000 000 01	0.000 000 001
ε	3.29053	3.89059	4.41717	4.89164	5.32672	5.73073	6.10941

Exemple d'application

- On cherche x tel que $\mathbb{P}(X > x) = 0.05$.
- x est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de X.
- $z = \frac{x-1400}{20}$ est le $95^{\text{ème}}$ percentile de la distribution de Z.
- On utilise la table de l'écart réduit.
- La table donne ε_α tel que $\mathbb{P}(|X| \geqslant \varepsilon_\alpha) = \alpha$.
- Le $95^{\text{ème}}$ percentile correspond à $\alpha = 0.1$.
- On lit dans la table la valeur $\varepsilon_{0.1} = 1.645$.
- La valeur correspondante est $x = 1400 + 20 \times 1.645 = 1432.9$.
- Il faut donc choisir de payer la prime lorsque le nombre d'œufs pondus dépasse 1433.

Loi normale : table de l'écart-réduit.

La table donne, pour une probabilité α, la valeur ε telle que la probabilité que l'écart-réduit égale ou dépasse en valeur absolue ε vaut α.

α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.10	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.20	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.30	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.40	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690
0.50	0.674	0.659	0.643	0.628	0.613	0.598	0.583	0.568	0.553	0.539
0.60	0.524	0.510	0.496	0.482	0.468	0.454	0.440	0.426	0.412	0.399
0.70	0.385	0.372	0.358	0.345	0.332	0.319	0.305	0.292	0.279	0.266
0.80	0.253	0.240	0.228	0.215	0.202	0.189	0.176	0.164	0.151	0.138
0.90	0.126	0.113	0.100	0.088	0.075	0.063	0.050	0.038	0.025	0.013

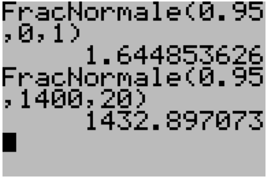
La probabilité α s'obtient par addition des nombres écrits en marge.
Exemple : pour $\alpha = 0.00 + 0.05 = 0.05$, $\varepsilon = 1.960$.

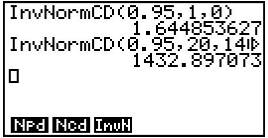
Table pour les petites valeurs de probabilité :

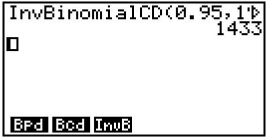
α	0.001	0.000 1	0.000 01	0.000 001	0.000 000 1	0.000 000 01	0.000 000 001
ε	3.29053	3.89059	4.41717	4.89164	5.32672	5.73073	6.10941

Avec vos calculatrices

- Loi normale : les calculatrices donnent les fractiles de la loi normale : $x | \mathbb{P}(X \leqslant x) = p$
  - TI : `FracNormale(p,`μ`,`σ`)`
  - casio : `InvNormCD(p,`σ`,`μ`)`
- Loi binomiale : les calculatrices casio proposent la fonction des fractiles de la binomiale : `BinomialCD(`p`,`n_B`,`p_B`)`







TCL

TCL : théorème central limite

- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendantes et de même distribution.

TCL : théorème central limite

- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendantes et de même distribution.
- $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.

TCL : théorème central limite

- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendentes et de même distribution.
- $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la somme de n VA.

TCL : théorème central limite

- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendentes et de même distribution.
- $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ est la somme de n VA.
- Lorsque $n \to \infty$ la loi de S_n converge vers $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

TCL : théorème central limite

- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendentes et de même distribution.
- $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la somme de n VA.
- Lorsque $n \to \infty$ la loi de S_n converge vers $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

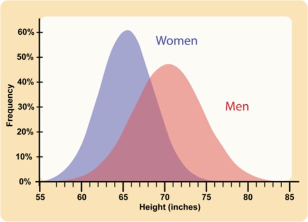
TCL : théorème central limite

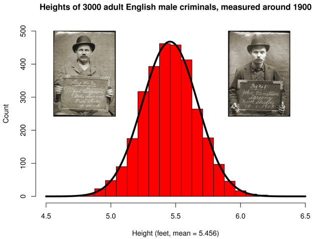
- $X_1, X_2, \ldots$ est une suite de VA indépendentes et de même distribution.
- $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.
- $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est la somme de n VA.
- Lorsque $n \to \infty$ la loi de S_n converge vers $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$

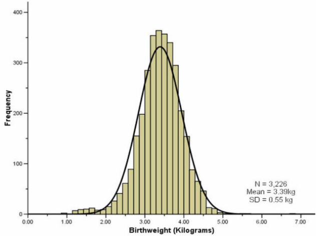
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{D}_{S_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$$

La distribution normale dans la nature

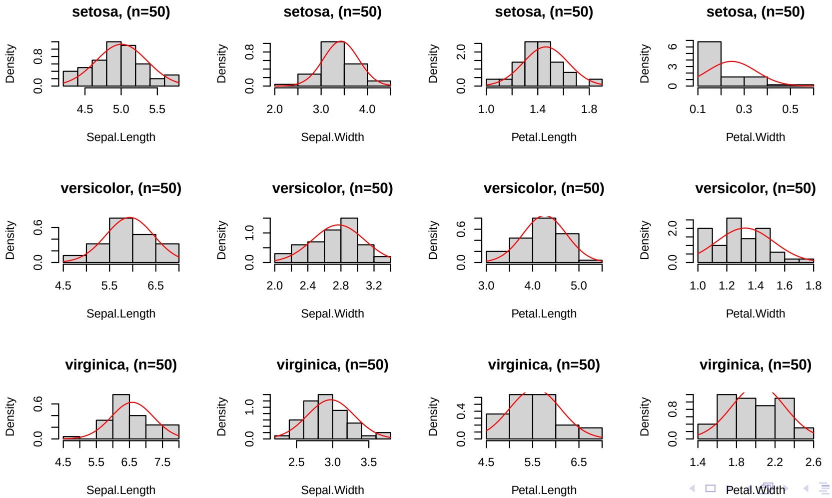
La loi normale intervient lorsque la variable mesurée est l'addition d'effets multiples et aléatoires.



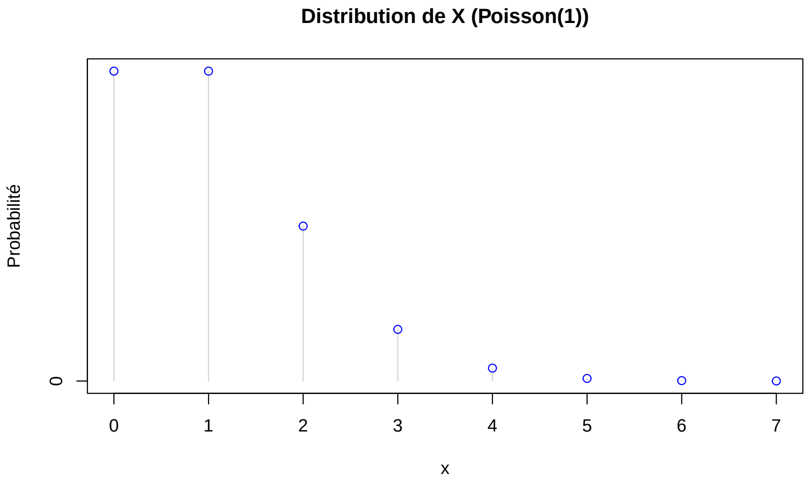




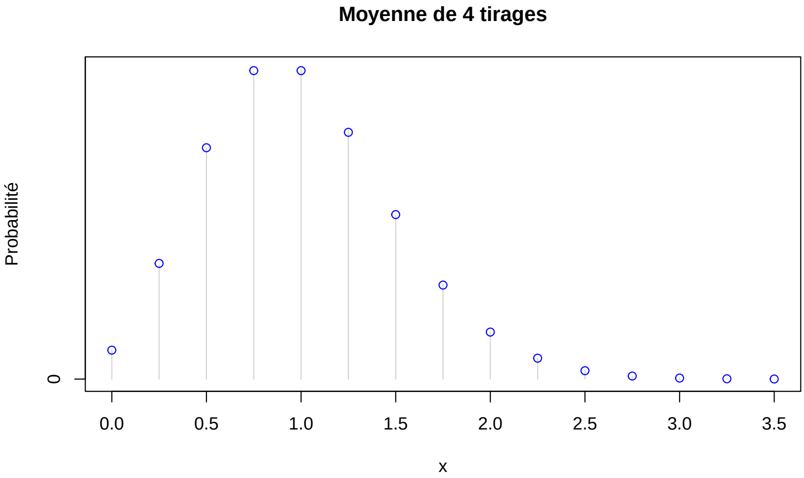
Les iris de Fisher



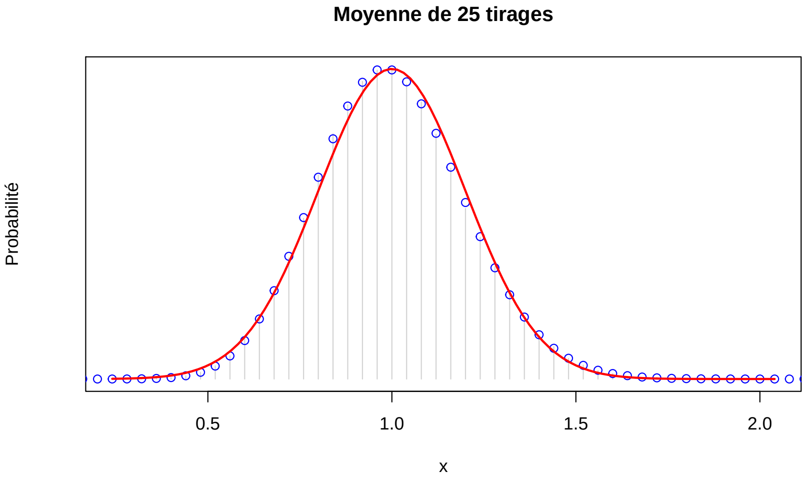
Exemples : $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$



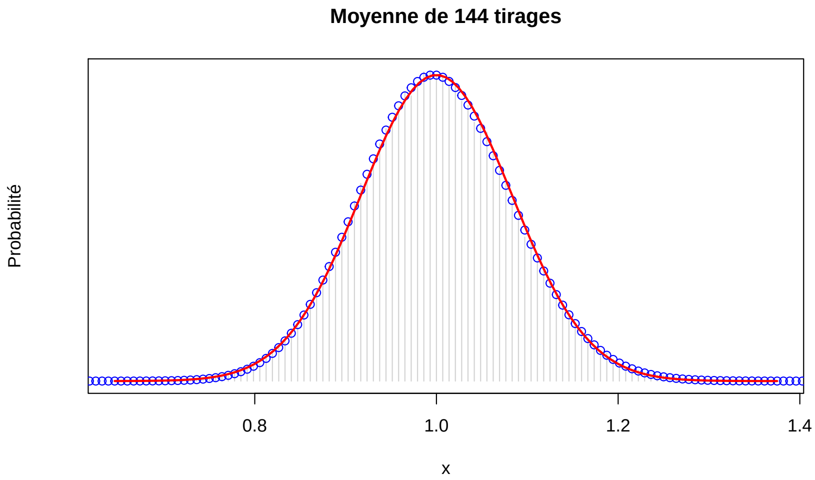
Exemples : $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$



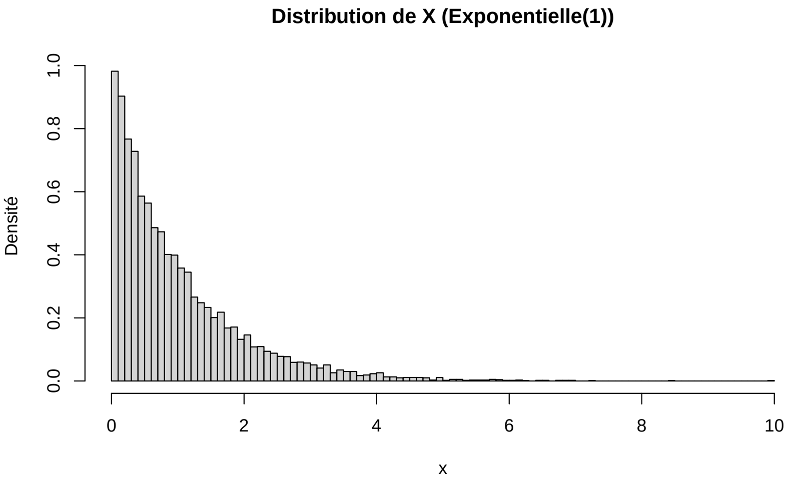
Exemples : $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$



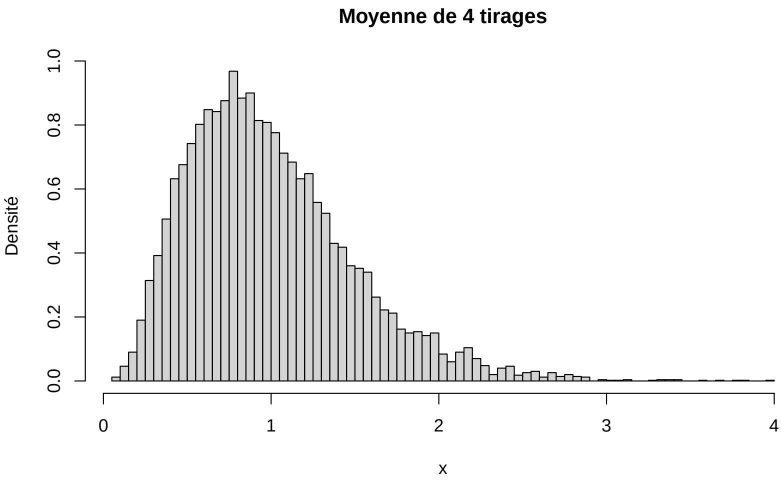
Exemples : $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda = 1)$



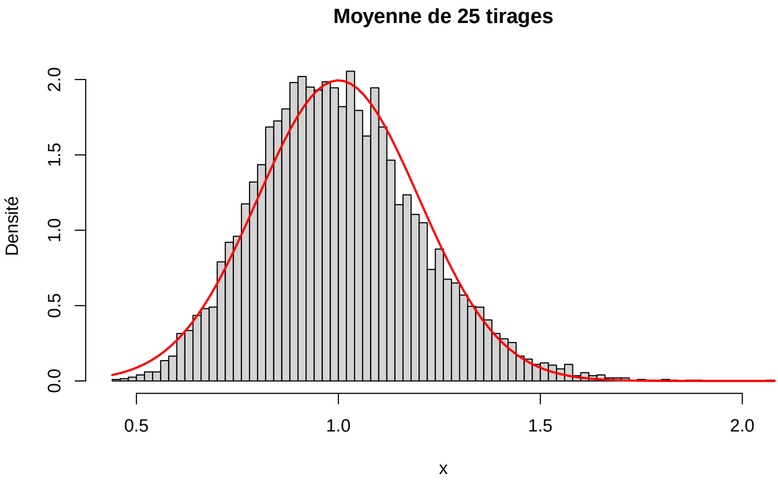
Exemples : $X_i \sim \mathcal{E}(\rho = 1)$



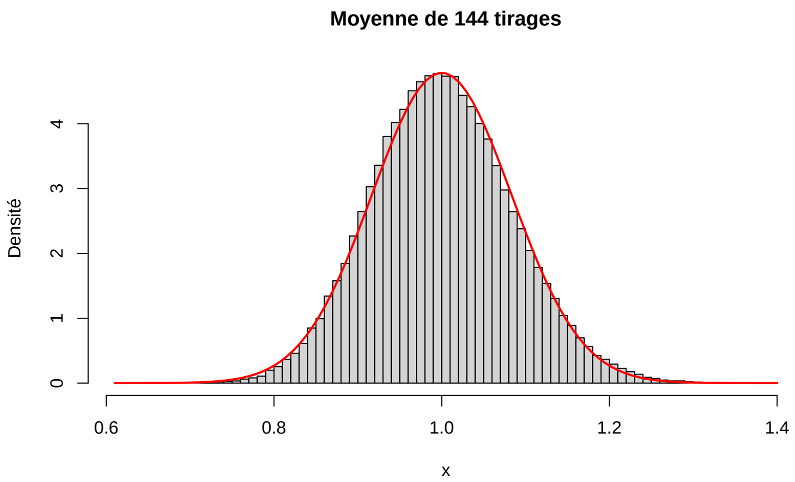
Exemples : $X_i \sim \mathcal{E}(\rho = 1)$



Exemples : $X_i \sim \mathcal{E}(\rho = 1)$



Exemples : $X_i \sim \mathcal{E}(\rho = 1)$



Moyenne de n VA iid

- La moyenne de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est une variable aléatoire.

Moyenne de n VA iid

- La moyenne de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est une variable aléatoire.
- Le théorème central limite nous permet de connaître la distribution de la moyenne lorsque n devient grand.

Moyenne de n VA iid

- La moyenne de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est une variable aléatoire.
- Le théorème central limite nous permet de connaître la distribution de la moyenne lorsque n devient grand.

Moyenne de n VA iid

- La moyenne de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est une variable aléatoire.
- Le théorème central limite nous permet de connaître la distribution de la moyenne lorsque n devient grand.

Application : L'estimation des paramètre d'une distribution.