Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Probabilités – Statistique
Printemps 2020

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Organisation du cours

- Probabilités
  - Probabilités simples, probabilités conditionnelles, théorème de Bayes
  - Variables aléatoires, lois de probabilité discrètes (et continues), théorème de la limite centrale
- Statistique
  - Estimation ponctuelle
  - Intervalle de confiance
  - Tests d'hypothèse

Probabilités et statistique en biologie

- Modéliser (ex : diagnostic génétique)
- Décrire et quantifier la variabilité
- Tester des effets
- Prédire des résultats
- Planifier des expériences

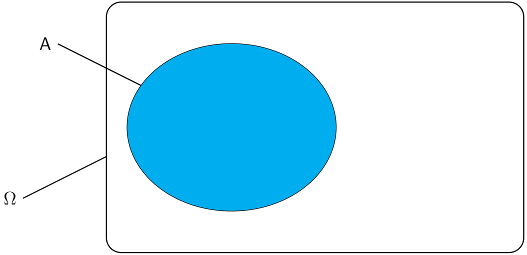
Passe par un formalisme mathématique.

Notations probabilistes et ensemblistes

L'univers des possibles
L'ensemble plein
Ω

Notations probabilistes et ensemblistes

Un événement A
Un sous ensemble A de Ω
A

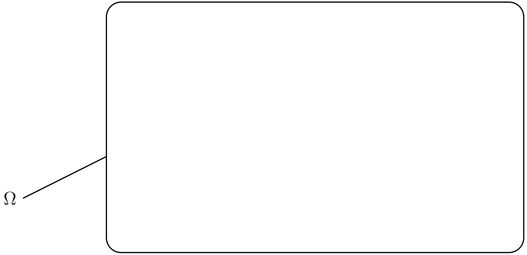


Notations probabilistes et ensemblistes

Un événement impossible

L'ensemble vide

$\emptyset$

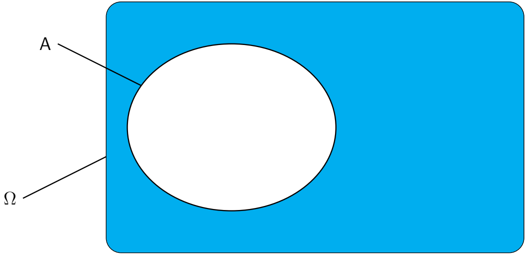


Notations probabilistes et ensemblistes

Non A

Le complémentaire de A

$\bar{A}$

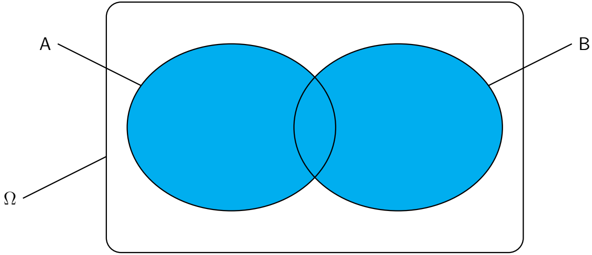


Notations probabilistes et ensemblistes

A ou B

l'union de A et B

$A \cup B$

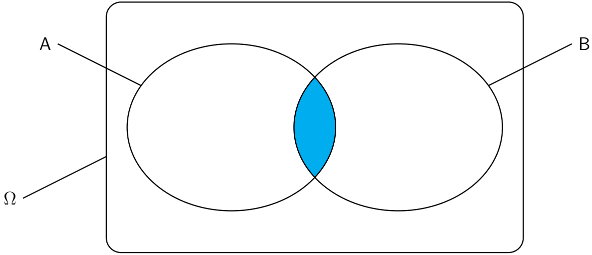


Notations probabilistes et ensemblistes

A et B

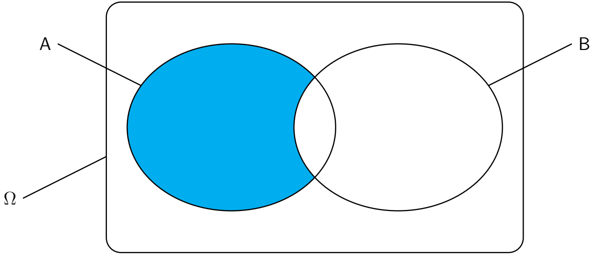
l'intersection de A et B

$A \cap B$



Notations probabilistes et ensemblistes

A et non B
A privé de B
$A \setminus B$

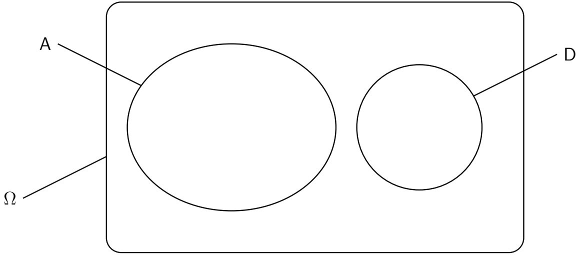


Notations probabilistes et ensemblistes

A et D sont incompatibles

A et D sont disjoints

$$A \cap D = \emptyset$$

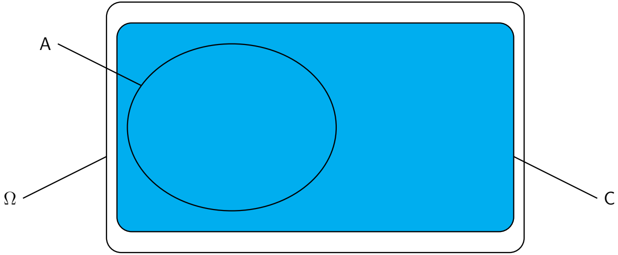


Notations probabilistes et ensemblistes

Si A alors C

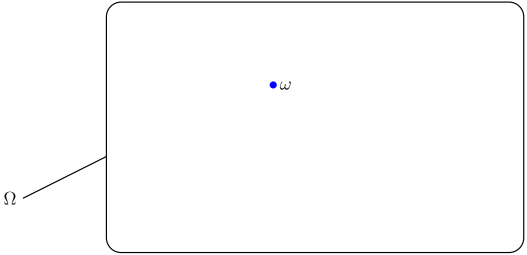
A est inclus dans C

$A \subseteq C$



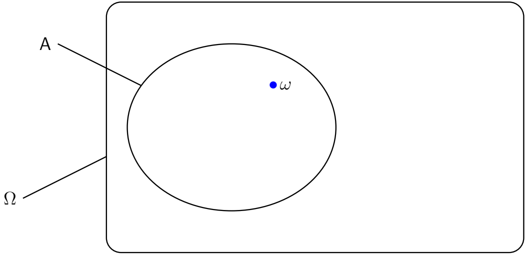
Notations probabilistes et ensemblistes

Événement élémentaire ω
Élément de Ω
$\omega \in \Omega$

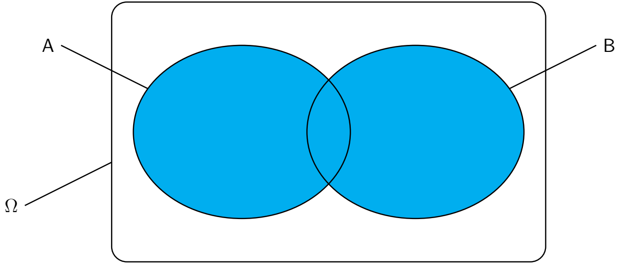


Notations probabilistes et ensemblistes

ω réalise A
Élément de A
$\omega \in A$

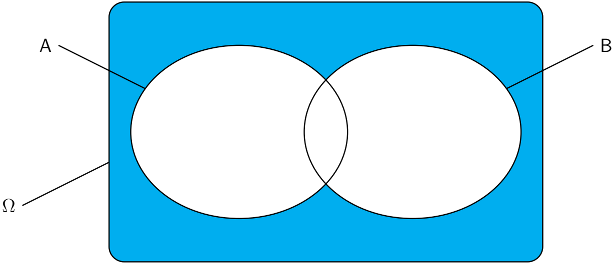


Application



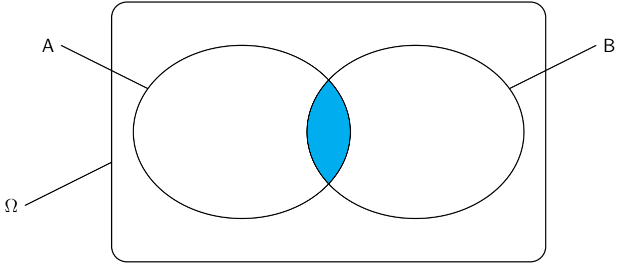
Que vaut $\overline{A \cup B}$?

Application



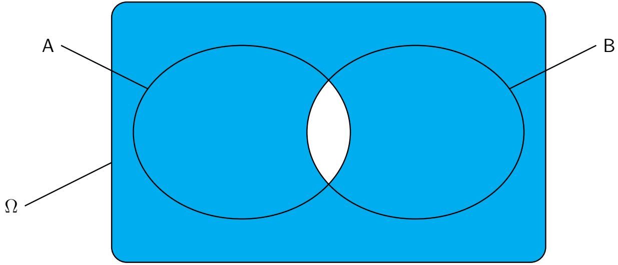
$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Application



Que vaut $\overline{A \cap B}$?

Application



$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

- On considère un univers Ω.
- $\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties de Ω.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{X \mid X \subseteq \Omega\}$$

- Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0, 1]$.

$$\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$$

- $\mathbb{P}(X)$ mesure la chance qu'un événement X se produise.

Exemple : Tirage à pile ou face

- Les événements élémentaires sont P (pile) et F (face).
- $\Omega = \{P, F\}$
- $\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$
- $\mathbb{P}$ est définie par

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longmapsto & 0 \\ \{P\} & \longmapsto & \frac{1}{2} \\ \{F\} & \longmapsto & \frac{1}{2} \\ \{P, F\} & \longmapsto & 1 \end{array}$$

Exemple : Un dé à six faces

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- L'ensemble des parties de Ω est

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(\Omega) = &\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5 \\
&\{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{2,3,4\}, \\
&\{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \\
&\{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,3,4,5\}, \{1,3,4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \\
&\{3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}
\end{aligned}
$$

Propriétés élémentaires

On considère un univers Ω et l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$
Une probabilité $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifie

- $\begin{array}{rccc} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & X & \mapsto & \mathbb{P}(X) \end{array}$
- $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega),\ \mathbb{P}(A) \geqslant 0$
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega),\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Si A et B sont des événements incompatibles alors la probabilité de A ou B est la somme des probabilités de A et B

Propriété : $\mathbb{P}(\emptyset)$

On utilise la propriété

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

avec $B = \emptyset$ on obtient

$$\left.\begin{array}{ll} A \cap \emptyset = \emptyset & \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup \emptyset) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\emptyset) \\ A \cup \emptyset = A & \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup \emptyset) = \mathbb{P}(A) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Propriété : $\mathbb{P}(\bar{A})$

On utilise les propriété

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

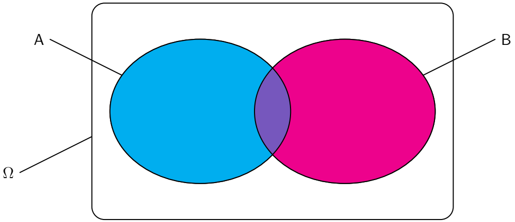
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

avec $B = \bar{A}$ on obtient

$$\left.\begin{array}{ll} A \cap \bar{A} = \emptyset & \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \\ A \cup \bar{A} = \Omega & \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup \bar{A}) = \mathbb{P}(\Omega) \end{array}\right\} \Rightarrow \color{red}{\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)}$$

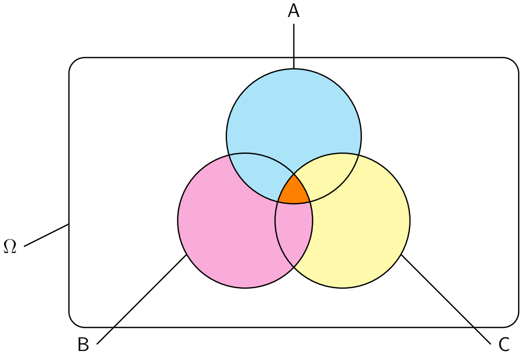
Propriété : $\mathbb{P}(A \cup B)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(\bar{A} \cap B\right)$$
$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\bar{A} \cap B\right)$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bar{A} \cap B\right) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

Extension : $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$



$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Généralisation : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_{j_i}\right) \right]$$

Application

Pour contenir la dynamique des populations de sangliers, on recommande aux chasseurs de tirer préférentiellement les femelles adultes.

Dans une population de sangliers constituée à 60% de jeunes, le sexe-ratio est équilibré chez les jeunes mais la proportion de mâles tous âges confondus est de 65%. Quelle est la proportion de femelles adultes dans cette population ?

	Mâles	Femelles	$\sum$
Jeunes	0.3	0.3	0.6
Adultes	0.35	0.05	0.4
$\sum$	0.65	0.35	1

Application

Les habitudes des clients d'une cantine sont les suivantes :

- 100% des clients consomment un plat principal
  - 60% des clients ne consomment rien d'autre. A
  - Les 40% restant prennent tous un fromage ou un dessert. $\bar{A}$
- 25% des clients prennent du fromage B
- 35% des clients prennent un dessert C

$$B \cup C = \bar{A},\ B \cap C \neq \emptyset$$

Application

Les habitudes des clients d'une cantine sont les suivantes :

- 100% des clients consomment un plat principal
  - 60% des clients ne consomment rien d'autre. A
  - Les 40% restant prennent tous un fromage ou un dessert. $\bar{A}$
- 25% des clients prennent du fromage B
- 35% des clients prennent un dessert C

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\bar{A}) = 0.2$$

Probabilité uniforme.

On cherche la probabilité d'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}\right) = p\,|A|$$

On vient de montrer $p = \frac{1}{|\Omega|}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

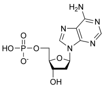
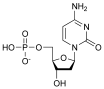
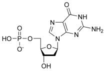
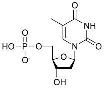
Nombre de suites de longueur k

- Ω est un ensemble fini contenant n éléments, $|\Omega| = n$.
- Combien existe-t-il de suites de k éléments de Ω ?

$$n \times n \times n \times \ldots \times n = n^k$$

Il existe n^k suites d'éléments de Ω de longueur k

Application

$\Omega = \{$  ,  ,  ,  $\}$

- Combien existe-t-il de suites de deux nucléotides ? $4^2 = 16$
- Combien existe-t-il de suites de trois nucléotides ? $4^3 = 64$

Nombre de permutations

- Une permutation de Ω est une façon d'ordonner les éléments de Ω.
  ex. $\Omega = \{1, 2, 3\}$
  $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$
  Il existe 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$
- Ω est un ensemble fini contenant n éléments, $|\Omega| = n$.
- Combien existe-t-il de permutations de Ω ?

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1 = n!$$

- $n!$ se prononce "factorielle n" ou "n factorielle"

Il existe $n!$ permutations d'un ensemble Ω de cardinal n

Nombre de permutations de k objets pris parmi n

- Ω est un ensemble fini contenant n éléments, $|\Omega| = n$.
- Combien existe-t-il de façons de choisir et ranger $k \leqslant n$ éléments différents de Ω ?

$$
\begin{aligned}
n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1) &= \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \times (n-k) \times \ldots \times 1}{(n-k) \times \ldots \times 1} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}
\end{aligned}
$$

Il existe $\frac{n!}{(n-k)!}$ permutations de k éléments pris parmi n

On parle aussi de nombre d'arrangements de k éléments pris parmi n.

Nombre de choix de k objets pris parmi n

- Ω est un ensemble fini contenant n éléments, $|\Omega| = n$.
- Combien existe-t-il de façons de choisir $k \leqslant n$ éléments différents de Ω ?
  - Il existe $\frac{n!}{(n-k)!}$ permutations (choix ordonnés).
  - Il y a $k!$ permutations possibles pour les k objets choisis.
- Notation : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

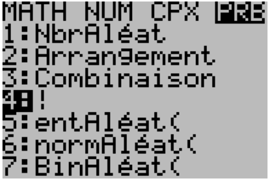
Il existe $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ façons de choisir k éléments pris parmi n

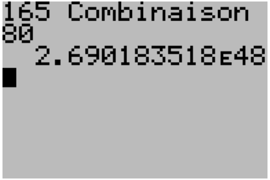
On parle aussi de nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

Point calculettes (TI)

- Combien vaut $70!$?
- Calculez le nombre de permutations de 10 éléments parmi 100, $\frac{100!}{90!}$.
- Calculez le nombre de combinaisons de 80 éléments parmi 165

TI : touche MATH puis choix PRB





Point calculettes (TI)

- Combien vaut $70!$?
- Calculez le nombre de permutations de 10 éléments parmi 100, $\frac{100!}{90!}$.
- Calculez le nombre de combinaisons de 80 éléments parmi 165

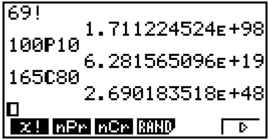
Casio : touche OPTN puis choix PROB sur le deuxième écran

MENU 1 OPTN F6 F3

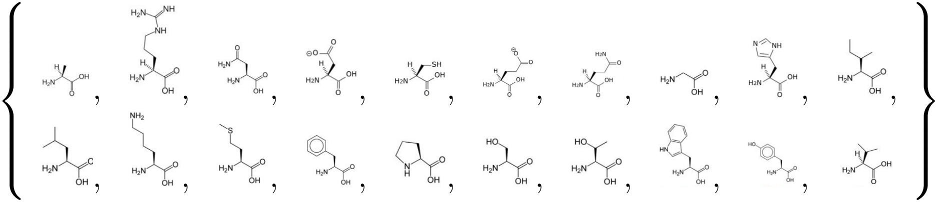
6 9 F1 EXE

1 0 0 F2 1 0 EXE

1 6 5 F3 8 0 EXE



Application

$\Omega =$ 

- Combien peut-on créer de polypeptides en utilisant exactement une fois chaque acide aminé ? $20! \approx 2.43\,10^{18}$
- Combien peut-on créer de décapeptides en utilisant au plus une fois chaque acide aminé ? $\frac{20!}{10!} \approx 6.7\,10^{11}$

Application

- Dans un groupe de n individus, quelle est la probabilité qu'au moins une personne fête son anniversaire un jour donné ? $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$
- Dans un groupe de n individus, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes fêtent leur anniversaire le même jour ? $1 - \frac{365!/(365-n)!}{365^n}$
- À votre avis, quelle est la probabilité qu'au moins une personne dans l'amphithéâtre fête son anniversaire aujourd'hui ?