Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1 - 15 mai 2023
Durée 120 minutes - Tous documents autorisés

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : ☐ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez verticalement votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :
....

Numéro d'étudiant : ....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Bioaccumulation des substances

Pour décrire mathématiquement la bioaccumulation d'une substance chimique potentiellement toxique par un organisme, on utilise un modèle dit toxico-cinétique ou pharmaco-cinétique selon que la substance est toxique ou pas. Dans ce type de modèles, l'organisme est symbolisé par un compartiment avec une entrée et une sortie ; il s'écrit à l'aide d'une équation différentielle ordinaire (EDO) de la manière suivante :

$$\frac{dC(t)}{dt} = k_u C_{exp} - k_e C(t) \quad \text{(équation E}_1\text{)}$$

avec $C(t)$ la concentration interne en contaminant (exprimée en µg.mg^{-1}) dans l'organisme au temps t, exprimé en jours (j), et C_{exp} la concentration d'exposition (exprimée en µg.mg^{-1}), supposée constante dans le milieu environnant. Les paramètres k_u et k_e sont strictement positifs.

Le sélénium est très bien accumulé par l'amanite *Amanita muscaria*

Question 1 Le paramètre k_u peut être interprété comme un taux :

☐ de mortalité ☐ d'élimination ☐ de croissance ■ d'accumulation

Question 2 Dans quelle unité s'exprime le paramètre k_e ?

☐ µg.mg^{-1} ☐ µg.L^{-1} ■ j^{-1} ☐ j

Pour simplifier l'équation E_1, on normalise la variable $C(t)$ par le facteur de bioconcentration, B, en posant :

$$C^*(t) = \frac{C(t)}{B} \quad \text{avec} \quad B = \frac{k_u}{k_e}$$

L'équation E_1 devient alors ($\alpha > 0$) :

$$\frac{dC^*(t)}{dt} = \alpha \left(C_{exp} - C^*(t)\right) \iff \frac{d(C^*(t) - C_{exp})}{dt} = -\alpha \left(C^*(t) - C_{exp}\right) \quad \text{(équation } \mathrm{E}_2\text{)}$$

Notez qu'en posant $x(t) = C^*(t) - C_{exp}$ l'équation E_2 s'écrit simplement $\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t)$.

Question 3 L'équation E_2 est :

☐ d'ordre 2
☐ non linéaire
☐ diophantienne
■ à variables séparables

Question 4 Quelle est l'expression du paramètre α ?

☐ $\frac{k_u}{k_e}$ ☐ k_u ■ k_e ☐ $k_u k_e$

Question 5 Quelle est la solution générale de l'équation E_2 ? On supposera $K \in \mathbb{R}$.

☐ $C^*(t) = K\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$
☐ $C^*(t) = Ke^{-\alpha t}$
■ $C^*(t) = Ke^{-\alpha t} + C_{exp}$
☐ $C^*(t) = C_{exp}e^{-\alpha t} + K$

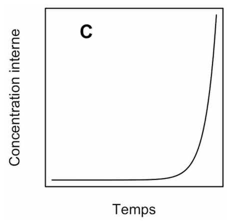
Question 6 Une solution particulière S_1 de l'équation E_2 s'écrit $C_1^*(t) = C_{exp}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)$, quelle est la condition initiale associée à $C_1^*(t)$, lorsque $t = 0$?

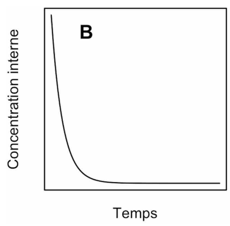
■ $C_1^*(0) = 0$ ☐ $C_1^*(0) = C_{exp}$ ☐ $C_1^*(0) = K$ ☐ $C_1^*(0) = -K$

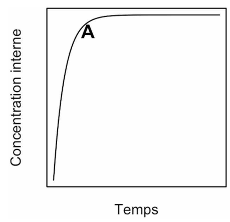
Question 7 Quelle est la limite de $C_1^*(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

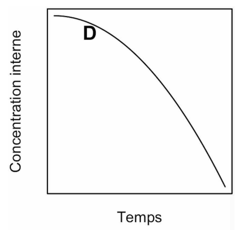
☐ 0 ■ C_{exp} ☐ α ☐ $+\infty$

Question 8 À partir de la solution S_1, quelle est la représentation graphique de $C^*(t)$?

☐ 

☐ 

■ 

☐ 

Question 9 Laquelle des fonctions suivantes est une solution particulière, on la notera $C_{part}(t)$, de l'équation E_1 ?

☐ $k_u C_{exp}$ ☐ $\frac{C_{exp}}{k_e}$ ■ $\frac{k_u}{k_e}C_{exp}$ ☐ $\frac{k_e}{k_u}C_{exp}$

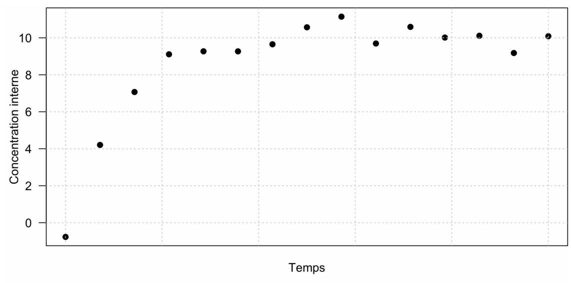
On donne maintenant la solution de l'équation E_1 associée à la condition initiale $C(0) = 0$. Elle s'écrit :

$$C_2(t) = \frac{k_u}{k_e}C_{exp}(1 - e^{-k_e t})$$

Question 10 Compte-tenu de la solution ci-dessus, quelle est la forme générale des solutions de l'équation E_1 ? On supposera $K \in \mathbb{R}$.

☐ $C(t) = K\left(e^{-k_e t} + \frac{k_u}{k_e}C_{exp}\right)$
☐ $C(t) = Ke^{-k_e t} + C_{exp}$
■ $C(t) = Ke^{-k_e t} + \frac{k_u}{k_e}C_{exp}$
☐ $C(t) = Ke^{-k_e t}$

DES mesures expérimentales ont été effectuées sur un spécimen d'*Amanita muscaria* exposé à une certaine concentration en sélénium. Ces données sont représentées sur la figure ci-après :



Question 11 On donne $B = 10$ pour le sélénium bioaccumulé par *Amanita muscaria*. En cherchant la limite de la solution de (E_1) associée à la condition initiale $C(0) = 0$ lorsque $t \to +\infty$, et en supposant qu'elle correspond à la dernière mesure de l'expérience, donnez une valeur approximative de la concentration d'exposition C_{exp}.

- ☐ $C_{exp} = 5$
- ☐ $C_{exp} = 10$
- ■ $C_{exp} = 1$
- ☐ $C_{exp} = 0$

Longévité et espérance de vie chez *Homo sapiens*

Si l'on posait la question suivante « si un enfant naît aujourd'hui dans un pays où l'espérance de vie à la naissance est de 75 ans, quel sera l'âge de sa mort ? », il est très probable que la majorité des personnes sondées répondrait « on peut espérer qu'il vivra jusqu'à l'âge de 75 ans ». Et bien *non*.

Le terme *espérance de vie*, employé actuellement dans le cadre de la réforme des retraites, est une espérance de vie théorique nommée espérance de vie fictive, EVF. C'est la durée de vie moyenne théorique d'un individu dans une population fictive qui connaîtrait tout au long de son existence les conditions de mortalité (par classe d'âge) de l'année considérée. Elle n'intègre donc pas les risques de mortalité *réels* auxquels les nouveau-nés de la période considérée seront confrontés au cours de leur vie future. Nous n'allons donc pas utiliser ici l'EVF mais lui préférer l'espérance de vie exacte, EVE, c'est-à-dire la longévité moyenne d'une population d'individus déjà décédés. Pour les espèces dont les individus vivent longtemps, comme *Homo sapiens*, cette EVE n'est pas simple à obtenir car pour la calculer il faut attendre que tous les individus étudiés soient morts.

Question 12 En considérant la définition de l'EVE donnée ci-dessus et celle du terme « espérance mathématique » vu en cours, l'EVE correspond à :

- ☐ l'écart-type des valeurs individuelles de la longévité de la population étudiée
- ☐ la variance des valeurs individuelles de la longévité de la population étudiée
- ■ la moyenne des valeurs individuelles de la longévité de la population étudiée
- ☐ la valeur de la longévité de tous les individus de la population étudiée

Considérons la population des Français nés en 1900, tous décédés en 2023. Supposons que la valeur calculée à partir de *tous* les hommes de cette population soit $\text{EVE}_\text{H} = 60{,}1$ années et que celle calculée à partir de *toutes* les femmes de cette population soit $\text{EVE}_\text{F} = 70{,}2$ années.

Question 13 Indiquez la formulation exacte

- ☐ Je ne peux pas conclure sans test statistique que les femmes présentent une longévité moyenne supérieure à celle des hommes dans cette population car je dois ici considérer la fluctuation (=erreur) d'échantillonnage
- ■ Je peux conclure sans test statistique que les femmes présentent une longévité moyenne supérieure à celle des hommes dans cette population car je n'ai pas ici à considérer la notion de fluctuation (=erreur) d'échantillonnage
- ☐ Je ne peux pas conclure sans test statistique que les femmes présentent une longévité moyenne supérieure à celle des hommes dans cette population car je n'ai pas à considérer ici la fluctuation (=erreur) d'échantillonnage
- ☐ Je peux conclure sans test statistique que les femmes présentent une longévité moyenne supérieure à celle des hommes dans cette population car je dois considérer ici la fluctuation (=erreur) d'échantillonnage

Imaginez que vous disposiez d'une machine à voyager dans le temps et que vous vouliez, grâce à cette invention, apporter à nos décideurs des données scientifiques précises sur la longévité des français vivants actuellement dans le cadre de la réforme des retraites. Vous iriez donc dans le futur, suffisamment loin dans le temps à une époque où tous les individus de cette cohorte seraient morts. Imaginez maintenant que vous constatiez que la distribution de la longévité individuelle dans cette population n'est pas symétrique en raison de quelques valeurs de longévité individuelle très élevées.

Question 14 Quel paramètre de position utiliseriez-vous pour donner un ordre de grandeur de la longévité de cette population ?

- ☐ Seule la longévité moyenne serait un bon indicateur de position de la longévité car elle est très sensible aux valeurs extrêmes d'une distribution non symétrique
- ☐ La longévité moyenne et la longévité médiane seraient de bons indicateurs de position de la longévité car ils sont peu sensibles aux valeurs extrêmes d'une distribution non symétrique
- ■ La longévité médiane serait un bon indicateur de position de la longévité mais il faudrait éviter d'utiliser la moyenne car elle est très sensible aux valeurs extrêmes d'une distribution non symétrique
- ☐ La longévité moyenne et la longévité médiane seraient de mauvais indicateurs de position de la longévité car ils sont très sensibles aux valeurs extrêmes d'une distribution non symétrique

Une étude a été réalisée à partir d'une base de données sur la longévité de membres des familles aristocratiques d'Europe qui ont vécu durant des siècles dans des conditions favorables. Les données concernent des personnes ayant vécu au XIX^e siècle. Un échantillonnage aléatoire simple a fourni les données suivantes. Echantillon de femmes : taille de l'échantillon $n = 2\ 068$; $\Sigma x_i = 151\ 377{,}6$; $\Sigma x_i^2 = 1\ 115\ 2827{,}4$. Echantillon d'hommes : $n = 4\ 566$, moyenne de l'échantillon = 64,7 ans ; écart-type de l'échantillon = 2,3 ans.

Question 15 Quelle est la valeur de l'estimation de l'écart-type de la longévité dans la sous-population de femmes ?

■ $\hat{\sigma} = 5,9$ ☐ $\sigma = 5,9$ ☐ $\sigma = 34,82$ ☐ $\hat{\sigma} = 34,82$

L'intervalle de confiance, IC, ($\alpha = 0,05$) associé à l'estimation de la longévité moyenne de la sous-population de femmes, $\mu_f = \text{EVE}_\text{F}$, est : [72,9 ; 73,4].

Question 16 À partir de l'intervalle de confiance calculé précédemment, indiquez la formulation exacte

- ☐ L'IC a 95 % de chance de contenir μ_f et la valeur de μ_f se situerait à l'extérieur de l'IC
- ☐ L'IC a 5 % de chance de contenir μ_f et la valeur μ_f se situerait à l'extérieur de l'IC
- ☐ L'IC a 5 % de chance de contenir μ_f et la valeur de μ_f se situerait entre la borne inférieure et la borne supérieure de l'IC
- ■ L'IC a 95 % de chance de contenir μ_f et la valeur de μ_f se situerait entre la borne inférieure et la borne supérieure de l'IC

Question 17 On voudrait savoir si la longévité moyenne (=EVE) est la même chez les femmes et les hommes de cette population. Pour répondre à cette question précisez le test d'hypothèse à réaliser

- ☐ Test de conformité de moyenne (= test de comparaison à une moyenne théorique) avec variances des population connues
- ■ Test d'égalité/ homogénéité de deux moyennes avec variances des populations inconnues
- ☐ Test d'égalité/d'homogénéité de deux moyennes avec variances des populations connues
- ☐ Test de conformité de moyenne (= test de comparaison à une moyenne théorique) avec variances des populations inconnues

Question 18 La valeur de la statistique observée du test approprié de la question précédente est égale à 63,34. Indiquez la valeur seuil de la statistique (pour un test bilatéral) et un risque de première espèce égal à 0,01.

- ☐ 2,576 car nous ne sommes pas dans les conditions où la loi de Student, que suit (sous H_0) la statistique du test, converge vers une loi normale centrée réduite
- ■ 2,576 car nous sommes dans les conditions où la loi de Student, que suit (sous H_0) la statistique du test, converge vers une loi normale centrée réduite
- ☐ 1,960 car nous sommes dans les conditions où la loi de Student, que suit (sous H_0) la statistique du test, converge vers une loi normale centrée réduite
- ☐ 1,960 car nous ne sommes pas dans les conditions où la loi de Student, que suit (sous H_0) la statistique du test, converge vers une loi normale centrée réduite

Question 19 Indiquez la formulation exacte

- ☐ La valeur observée de la statistique est très compatible avec les valeurs attendues sous H_0 et la fluctuation d'échantillonnage ne peut pas expliquer, à elle seule, la valeur de la statistique observée dans notre expérience
- ☐ La valeur observée de la statistique est très peu compatible avec les valeurs attendues sous H_0 et seule la fluctuation d'échantillonnage pourrait expliquer la valeur de la statistique observée dans notre expérience
- ☐ La valeur observée de la statistique est très compatible avec les valeurs attendues sous H_0 et seule la fluctuation d'échantillonnage pourrait expliquer la valeur de la statistique observée dans notre expérience
- ■ La valeur observée de la statistique est très peu compatible avec les valeurs attendues sous H_0 et la fluctuation d'échantillonnage ne peut pas expliquer, à elle seule, la valeur de la statistique observée dans notre expérience

Question 20 Que concluez-vous biologiquement à l'issue de ce test quant à la longévité moyenne, EVE, entre les hommes et les femmes des familles aristocratiques du XIX^{e} siècle ?

- ☐ Elle est la même dans les deux sous-populations et le risque d'erreur de première espèce associé à cette conclusion est égal à 5 %
- ☐ Elle est la même dans les deux sous-populations et le risque d'erreur de première espèce associé à cette conclusion est égal à 1 %
- ☐ Elle varie entre les deux sous-populations et le risque d'erreur de première espèce associé à cette conclusion est égal à 5 %
- ■ Elle varie entre les deux sous-populations et le risque d'erreur de première espèce associé à cette conclusion est égal à 1 %

Question 21 Une étude préliminaire réalisée dans la même population mais basée sur des tailles d'échantillon égales à 10 avait conduit à conclure qu'il n'existait pas de différence de longévité moyenne entre les deux sous-populations (hommes et femmes). Quelle est la proposition exacte ?

- ☐ Cette conclusion n'est pas assez prudente car la détection de différence significative pourrait facilement s'expliquer par un manque de puissance en raison de la faible taille des échantillons
- ☐ Cette conclusion est satisfaisante car la détection de différence significative pourrait facilement s'expliquer par un manque de puissance en raison de la faible taille des échantillons
- ☐ Cette conclusion est satisfaisante car la non détection de différence significative pourrait facilement s'expliquer par une puissance élevée en raison de la faible taille des échantillons
- ■ Cette conclusion n'est pas assez prudente car la non détection de différence significative pourrait facilement s'expliquer par un manque de puissance en raison de la faible taille des échantillons

Mortalité précoce dans la population française

Selon des données de l'INSEE publiées en 2018 les femmes représentent 52 % des individus de la population française. Dans cette même population française, on peut calculer que 5,76 % des individus sont des hommes vivant au maximum 62 ans (*i.e.* morts à 62 ans ou avant) et que 94 % des femmes vivent au-delà de 62 ans.

Question 22 Quelle est la probabilité de mourir au maximum à 62 ans sachant que je suis un homme appartenant à cette population ?

☐ 0,09 ■ 0,12 ☐ 8,33 ☐ 0,0576

Question 23 Quelle est la probabilité pour qu'un individu (quel que soit son sexe) appartenant à cette population meure au maximum à 62 ans ?

☐ 0,18 ☐ 0,002 ☐ 0,34 ■ 0,089

Considérons une population dans laquelle la probabilité de mourir avant 62 ans est égale à 0,25 pour un homme. On a prélevé aléatoirement et de manière indépendante 500 individus hommes dans cette population.

Question 24 Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X modélisant le nombre d'hommes morts avant 62 ans dans un échantillon de 500 hommes ?

☐ Une loi de Poisson de paramètres n (épreuves) = 500 et p (succès) = 0,25
☐ Une loi de Poisson de paramètres n (épreuves) et p (succès) = 125
■ Une loi Binomiale de paramètres n (épreuves) = 500 et p (succès) = 0,25
☐ Une loi de Bernoulli de paramètres n (épreuves) = 500 et p (succès) = 0,25

Question 25 Quelle formule utiliseriez-vous pour calculer rapidement $P(X \geq 1)$?

☐ $1 - P(X > 0)$ avec $P(X > 0) = 3.2\ 10^{-13}$
☐ $1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 0,25$
☐ $1 - P(X = 500)$ avec $P(X = 500) = 3.2\ 10^{-13}$
■ $1 - P(X = 0)$ avec $P(X = 0) = 3.39\ 10^{-63}$

- Fin du sujet -