Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1 - 20 mai 2022
Durée 120 minutes - Tous documents autorisés

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : □ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Partie 1 : Analyse

Le gain journalier de masse corporelle (en kg) d'un chaton à partir de sa naissance est noté $y(t)$. Cet accroissement pondéral dépend notamment de la quantité de lait (en décilitres) que le chaton reçoit chaque jour de sa mère pendant l'allaitement. Cette quantité de lait est notée $f(t)$. Une étude approfondie a permis de montrer que le processus d'accroissement pondéral est donné par la formule :

$$\frac{dy}{dt} + 2y = f(t) \qquad (1)$$

Question 1 De quel ordre est cette équation différentielle ?

- □ ordre indéterminé
- □ aucun ordre
- □ ordre 2
- ■ ordre 1

Question 2 De quel type est cette équation différentielle ?

- □ Homogène
- □ À variables séparables
- ■ Linéaire à coefficients constants
- □ À variables séparables avec second membre

Question 3 Donner la forme générale des solutions de l'équation (1) sans second membre avec $K \in \mathbb{R}$.

- ☐ $y_s(t) = Ke^{2t}$
- ☐ $y_s(t) = K + e^{2t}$
- ☐ $y_s(t) = K + e^{-2t}$
- ■ $y_s(t) = Ke^{-2t}$

Les premières études menées sur le sujet ont considéré que la quantité journalière de lait reçu par un chaton est une constante telle que $f(t) = 1$ dl. Le processus d'accroissement pondéral est donc donné par la formule :

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 1 \qquad (2)$$

Question 4 Donner une solution particulière, notée $y_p(t)$, de l'équation (2)

- ☐ $y_p(t) = \frac{-1}{2}$
- ☐ $y_p(t) = -2$
- ■ $y_p(t) = \frac{1}{2}$
- ☐ $y_p(t) = 2$

Question 5 Donner la solution générale de l'équation (2)

- ☐ $y(t) = e^{-2t} + K - \frac{1}{2}$
- ☐ $y(t) = e^{-2t} + K - 2$
- ■ $y(t) = Ke^{-2t} + \frac{1}{2}$
- ☐ $y(t) = Ke^{2t} + 2$

Question 6 À partir de la solution trouvée à la question 5, quelle est la valeur de K sachant que la condition initiale est $y(0) = 0$?

- ☐ $K = \frac{1}{2}$
- ☐ $K = -2$
- ■ $K = \frac{-1}{2}$
- ☐ $K = 1$

La quantité de lait transmise au chaton par la mère n'est en fait pas constante mais est donnée par : $f(t) = e^{-t}(2t-1)$. Le processus d'accroissement pondéral est alors donné par la formule :

$$\frac{dy}{dt} + 2y = e^{-t}(2t-1) \qquad (3)$$

Question 7 Donner la forme de la solution particulière de l'équation (3)

- ■ $y_p(t) = e^{-t}(at + b)$
- ☐ $y_p(t) = e^{at}(2t - 1)$
- ☐ $y_p(t) = e^{-t}(2t - 1) + C$
- ☐ $y_p(t) = Ke^{-2t}(at + b)$

Question 8 Donner la solution particulière de l'équation (3)

- ☐ $y_p(t) = e^{-2t}(2t - 3)$
- ■ $y_p(t) = e^{-t}(2t - 3)$
- ☐ $y_p(t) = e^{-2t}(t - 4)$
- ☐ $y_p(t) = e^{-t}(t + 3)$

Question 9 En utilisant la solution générale de l'équation (3) quelle est la valeur de K sachant que la condition initiale est toujours donnée par la relation $y(0) = 0$?

- ☐ $K = -4$
- ☐ $K = -3$
- ■ $K = 3$
- ☐ $K = 4$

Question 10 Soit $y(t)$ la solution générale de l'équation (3). On s'intéresse au sens de variation de $y(t)$. En utilisant la valeur de K trouvée à la question 9, donner l'expression de la dérivée de $y(t)$.

- ☐ $\frac{dy(t)}{dt} = 6e^{2t} + e^{-2t}(5 - 2t)$
- ☐ $\frac{dy(t)}{dt} = 8e^{2t} + e^{-t}(2t - 4)$
- ■ $\frac{dy(t)}{dt} = -6e^{-2t} + e^{-t}(5 - 2t)$
- ☐ $\frac{dy(t)}{dt} = -8e^{-t} + e^{-2t}(2t - 4)$

Dans un article de 2017, Simon GÄCHTLER et Jonathan F. SCHULZ se sont intéressés à la relation entre le niveau d'irrespect de la loi (*prevalence of rule violation* ou PRV) dans les sociétés et l'honnêteté intrinsèque des citoyens. Comme il est difficile d'évaluer le niveau d'honnêteté individuellement, les auteurs ont eu recours à une expérience appelée *dice in a cup* permettant aux sujets qui s'y soumettent de faire le choix de contourner les règles pour gagner plus d'argent[1]. L'expérience est présentée sur la figure 1.

B : Sujet honnête

X_1 ↓ \ X_2	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
6	0	0	0	0	0	0
1	10	10	10	10	10	10
2	20	20	20	20	20	20
3	30	30	30	30	30	30
4	40	40	40	40	40	40
5	50	50	50	50	50	50

C : Tirage le plus favorable

X_1 ↓ \ X_2	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
6	0	10	20	30	40	50
1	10	10	20	30	40	50
2	20	20	20	30	40	50
3	30	30	30	30	40	50
4	40	40	40	40	40	50
5	50	50	50	50	50	50

D : Maximisation du gain

X_1 ↓ \ X_2	**6**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
6	50	50	50	50	50	50
1	50	50	50	50	50	50
2	50	50	50	50	50	50
3	50	50	50	50	50	50
4	50	50	50	50	50	50
5	50	50	50	50	50	50

FIGURE 1 – Le sujet procède successivement à deux lancers d'un dé équilibré à six faces contenu dans un gobelet opaque de telle sorte qu'il est le seul à connaître les résultats notés X_1 (1$^{\text{er}}$ lancé) et X_2 (2$^{\text{e}}$ lancé). Il doit ensuite déclarer la valeur de X_1, sachant qu'il recevra une somme d'argent G proportionnelle au résultat annoncé, sauf s'il s'agit d'un 6 qui ne rapporte rien. Les montants G réclamés par le sujet à l'issue de l'épreuve dépendent du comportement de celui-ci : le sujet honnête déclare le résultat X_1 (**B**) ; le sujet décide de changer les règles et déclare le résultat le plus favorable entre X_1 et X_2 (**C**) ; le sujet maximise ses gains en déclarant toujours avoir obtenu un 5 (**D**).

Partie 2 : Probabilités

Question 11 Dans l'expérience *dice in a cup*, X_1 est la variable aléatoire correspondant au résultat du premier lancer d'un dé équilibré à six faces. Quelle est la loi de distribution de X_1 ?

- □ X_1 suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1$.
- □ X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n = 6,\, p = \frac{1}{6}\right)$.
- ■ X_1 suit la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- □ X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

Question 12 On note G le montant réclamé par le sujet à la fin de l'épreuve. Le tableau (B) de la figure 1 indique les montants réclamés pour un sujet honnête. Quelle est l'espérance de G, notée $\mathbb{E}_{(B)}(G)$ dans ce cas ?

□ 15 □ 30 □ 10 □ 20 □ 33 ■ 25

Question 13 Le tableau (D) de la figure 1 indique les montants réclamés pour un sujet qui maximise ses gains. Quelle est la variance de G, notée $\mathbb{V}_{(D)}(G)$ dans ce cas ?

□ 50 □ $\frac{50^2}{36}$ □ 2500 ■ 0

Question 14 On suppose que la population est constituée de 36% de sujets honnêtes se comportant conformément au tableau de la figure 1(B), de 36% de sujets qui contournent les règles et se comportent conformément au tableau de la figure 1(C) et de 28% de sujets qui maximisent leurs gains se comportant conformément au tableau de la figure 1(D). Quelle est la probabilité qu'un sujet tiré au hasard dans la population et soumis à cette épreuve réclame finalement un gain de 40 euros ?

□ 0.333 □ 0.200 ■ 0.150 □ 0.139 □ 0.360 □ 0.120

1. Par mesure de simplicité, nous présentons des résultats pour une unité monétaire de 10 euros. Dans la réalité, ce montant est adapté aux revenus moyens des populations pour être aussi incitatif dans tous les pays.

Question 15 En supposant la même composition de la population qu'à la question précédente, quelle est la probabilité conditionnelle qu'un sujet soit honnête sachant qu'il a réclamé un gain de 40 euros à l'issue de l'épreuve ?

☐ 0.64 ☐ 0.09 ☐ 0.06 ☐ 0.5 ■ 0.4 ☐ 0.6 ☐ 0.36

Question 16 Dans le cas où les sujets adoptent le comportement du tableau (C) de la figure 1, l'espérance et la variance du gain G, notées $\mathbb{E}_{(C)}(G)$ et $\mathbb{V}_{(C)}(G)$ ont les valeurs suivantes :

$$\mathbb{E}_{(C)}(G) = \frac{1250}{36} \quad \text{et } \mathbb{V}_{(C)}(G) = \frac{255500}{36^2}$$

On note $G_1, \ldots, G_{100}$ les gains réclamés par 100 sujets indépendants qui adoptent le comportement du tableau (C) de la figure 1, vers quelle loi de distribution tend le gain moyen $\bar{G} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} G_i$?

■ La loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = \mathbb{E}_{(C)}(G), \sigma^2 = \frac{\mathbb{V}_{(C)}(G)}{100}\right)$
☐ La loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = \frac{\mathbb{E}_{(C)}(G)}{100}, \sigma^2 = \mathbb{V}_{(C)}(G)\right)$
☐ La loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = \mathbb{E}_{(C)}(G), \sigma^2 = \mathbb{V}_{(C)}(G)\right)$
☐ La loi normale $\mathcal{N}\left(\mu = \frac{\mathbb{E}_{(C)}(G)}{100}, \sigma^2 = \frac{\mathbb{V}_{(C)}(G)}{10000}\right)$

Partie 3 : Statistique (1)

Sur un échantillon de $n = 237$ étudiants d'un pays donné soumis à l'épreuve *dice in a cup*, les gains réclamés étaient distribués de la façon suivante :

Gain réclamé	0	10	20	30	40	50
Nombre d'étudiants réclamant ce gain	11	10	29	49	65	73

Question 17 Quelles sont la moyenne et la variance observées du gain réclamé dans l'échantillon ci-dessus ?

☐ $\hat{\mu} = 35.44$ et $\hat{\sigma}^2 = 192.71$
☐ $\hat{\mu} = 56$ et $\hat{\sigma}^2 = 381.25$
☐ $\bar{x} = 56$ et $s^2 = 366$
☐ $\mu = 56$ et $\sigma^2 = 381.25$
☐ $\mu = 35.44$ et $\sigma^2 = 192.71$
■ $\bar{x} = 35.44$ et $s^2 = 191.89$

Question 18 En supposant que l'échantillon est bien représentatif et constitué d'observations indépendantes, quelles sont les conditions nécessaires concernant la distribution du gain pour calculer un intervalle de confiance de la moyenne du gain réclamé ?

☐ Il faut que le gain réclamé suive une distribution normale dans l'échantillon.
☐ Il faut que le gain réclamé et le nombre d'étudiants réclamant le gain suivent des distributions normales de même variance dans la population.
☐ Il faut que le gain réclamé suive une distribution normale dans la population.
■ On dispose d'un grand échantillon, donc il n'y a pas de condition particulière sur la distribution du gain réclamé.

Question 19 En supposant les éventuelles conditions d'application satisfaites, donnez un intervalle de confiance ($\alpha = 0.05$) de la moyenne du gain réclamé dans la population d'où proviennent ces étudiants.

☐ $53.56 \leqslant \hat{\mu} \leqslant 58.44$
☐ $53.56 \leqslant \bar{x} \leqslant 58.44$
☐ $53.56 \leqslant \mu \leqslant 58.44$
☐ $33.68 \leqslant \bar{x} \leqslant 37.21$
☐ $33.68 \leqslant \hat{\mu} \leqslant 37.21$
■ $33.68 \leqslant \mu \leqslant 37.21$

Partie 4 : Statistique (2)

Question 20 On veut tester si la distribution de la population dans laquelle a été tiré l'échantillon (tableau, partie 3) suit la distribution attendue si tous les participants choisissent de réclamer le gain correspondant au résultat le plus favorable (tableau (C) de la figure 1). Sous cette hypothèse, les probabilités théoriques des 6 classes sont :

Gain réclamé	0	10	20	30	40	50
Probabilité	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Quel test doit-on réaliser ?

- ☐ Un test de Student d'homogénéité des moyennes
- ☐ Un test de Student sur des données appariées
- ■ Un test du χ^2 d'ajustement à une distribution théorique
- ☐ Un test de Student de conformité à une moyenne théorique

Question 21 quelles sont les conditions d'application de ce test ?

- ■ Effectif total $\geqslant 50$ et tous les effectifs théoriques $\geqslant 5$
- ☐ On a un grand échantillon donc il n'y a pas de conditions d'application particulières
- ☐ La variable aléatoire considérée doit être distribuée normalement
- ☐ Le gain réclamé et le nombre d'étudiants doivent être distribués normalement et avoir la même variance

Question 22 Quelle est la valeur de la statistique de ce test ?

☐ 1.452 ☐ 0.038 ☐ 7.214 ☐ 12.50 ■ 8.990

Question 23 À quelle valeur seuil convient-il de comparer la valeur obtenue à la question précédente pour prendre une décision avec un risque de première espèce de 5% ?

☐ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,4\,ddl} = 9.488$	☐ $t_{\alpha=0.05,\,4\,ddl} = 2.776$	■ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,5\,ddl} = 11.070$
☐ $\varepsilon_{\alpha=0.05} = 1.960$	☐ $t_{\alpha=0.05,\,5\,ddl} = 2.571$	
☐ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,6\,ddl} = 12.592$	☐ $t_{\alpha=0.05,\,6\,ddl} = 2.447$	☐ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,3\,ddl} = 7.815$

Question 24 Quelle conclusion tirez-vous de ce test ?

- ☐ La distribution des gains est compatible avec le comportement *tirage le plus favorable*, avec un risque de première espèce $\alpha = 0.05$.
- ☐ La distribution des gains n'est pas compatible avec le comportement *tirage le plus favorable*, avec un risque de seconde espèce β inconnu.
- ■ La distribution des gains est compatible avec le comportement *tirage le plus favorable*, avec un risque de seconde espèce β inconnu.
- ☐ La distribution des gains n'est pas compatible avec le comportement *tirage le plus favorable*, avec un risque de première espèce $\alpha = 0.05$.

Partie 5 : Statistique (3)

Les auteurs ont classé les pays selon l'indice PRV (*prevalence of rule violation*). On souhaite comparer la moyenne des gains moyens réclamés dans les pays à PRV faible (où la loi est mieux respectée) à celle des pays à PRV élevé (où la loi est moins respectée). On dispose de données pour 23 pays dont 9 ont une PRV élevé et 14 ont un PRV faible. Pour chaque pays, désigné par son code ISO 3166 à trois chiffres, on donne ci-dessous la moyenne des gains réclamés $\langle G\rangle_i$ ainsi que des résultats intermédiaires utiles pour vos calculs. On utilise les notations classiques (μ, $\hat{\mu}$ et $\bar{x}$ pour les moyennes ; σ^2, $\hat{\sigma}^2$, s^2 pour les variances) et les indices 1 (pour l'ensemble des pays à PRV élevé) ou 2 (pour l'ensemble des pays à PRV faible).

Pays à PRV élevée									
Pays	156	170	268	320	404	504	834	792	704
$\langle G\rangle_i$	35.44	33.65	33.92	32.75	34.24	34.38	38.99	39.57	34.71

$n = 9$, $\sum_{i=1}^{9}\langle G\rangle_i = 317.65$, $\sum_{i=1}^{9}\langle G\rangle_i^2 = 11256.5961$

Pays à PRV faible														
Pays	040	203	276	360	380	440	458	528	616	703	710	724	752	826
$\langle G \rangle_i$	32.58	33.64	30.00	33.82	30.73	29.58	32.34	32.38	34.55	31.26	32.17	32.78	29.76	29.70

$n = 14, \quad \sum_{i=1}^{14} \langle G \rangle_i = 445.29, \quad \sum_{i=1}^{14} \langle G \rangle_i^2 = 14198.6227$

Question 25 Quel test statistique doit-on réaliser ?

- ■ Un test de Student d'homogénéité des moyennes
- □ Un test χ^2 de conformité à une distribution théorique
- □ Un test de Student de conformité à une moyenne théorique
- □ Un test de Student sur des données appariées

Question 26 Quelle est l'hypothèse nulle de ce test ?

- □ $\sigma_1 = \sigma_2$
- □ $s_1^2 = s_2^2$
- □ $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$
- □ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- ■ $\mu_1 = \mu_2$
- □ $\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2$

Question 27 Quelles en sont les conditions d'application ?

- □ Il faut que le gain réclamé moyen par pays suive une distribution normale dans l'ensemble des pays à PRV faible et dans l'ensemble des pays à PRV élevée.
- □ Il faut que le gain réclamé moyen par pays suive la même distribution normale dans l'ensemble de tous les pays.
- ■ Il faut que le gain réclamé moyen par pays suive une distribution normale dans l'ensemble des pays à PRV faible et dans l'ensemble des pays à PRV élevée et que ces deux distributions aient la même variance.
- □ Il n'y a pas de condition particulière sur la distribution du gain réclamé moyen par pays.

Question 28 On suppose les conditions d'application satisfaites. Quelle est la valeur de la statistique du test ?

■ 4.161 □ 4.370 □ 4.053 □ 3.841 □ 1.960

Question 29 À quelle valeur seuil convient-il de comparer la statistique observée pour effectuer un test en prenant un risque de première espèce de 5% ?

- □ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,22\,ddl} = 33.924$
- □ $t_{\alpha=0.05,\,23\,ddl} = 2.069$
- □ $t_{\alpha=0.05,\,20\,ddl} = 2.086$
- ■ $t_{\alpha=0.05,\,21\,ddl} = 2.08$
- □ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,23\,ddl} = 35.172$
- □ $\varepsilon_{\alpha=0.05} = 1.960$
- □ $t_{\alpha=0.05,\,22\,ddl} = 2.074$
- □ $\chi^2_{\alpha=0.05,\,21\,ddl} = 32.671$

Question 30 Quelle est la conclusion du test ?

- □ Le gain réclamé moyen par pays ne diffère pas entre les pays à PRV faible et les pays à PRV élevée, avec un risque de seconde espèce β inconnu.
- ■ Le gain réclamé moyen par pays diffère entre les pays à PRV faible et les pays à PRV élevée, avec un risque de première espèce $\alpha = 0.05$.
- □ Le gain réclamé moyen par pays ne diffère pas entre les pays à PRV faible et les pays à PRV élevée, avec un risque de première espèce $\alpha = 0.05$.
- □ Le gain réclamé moyen par pays diffère entre les pays à PRV faible et les pays à PRV élevée, avec un risque de seconde espèce β inconnu.

- Fin du sujet -