

Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1 - 1^{er} juin 2021
Durée 120 minutes - Tous documents autorisés

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

- Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : $\square \rightarrow \blacksquare$.
- Ne pas utiliser de crayon à papier.

- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex[®]).
 - N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
 - Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
 - Une réponse fausse donne des points négatifs.
-

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

.....

0 0 0 0 0 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1
2 2 2 2 2 2 2 2
3 3 3 3 3 3 3 3
4 4 4 4 4 4 4 4
5 5 5 5 5 5 5 5
6 6 6 6 6 6 6 6
7 7 7 7 7 7 7 7
8 8 8 8 8 8 8 8
9 9 9 9 9 9 9 9

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie 1

LA vitamine D est une vitamine liposoluble fondamentale pour le maintien de l'homéostasie de l'organisme. Apportée soit par une synthèse endogène induite par l'exposition aux UV, soit par l'alimentation, elle est impliquée dans de nombreuses fonctions, comme l'absorption du calcium et du phosphore. Une carence en vitamine D serait associée à un excès de mortalité, toutes causes confondues. Afin de mieux comprendre la cinétique de cette vitamine dans l'organisme, des chercheurs souhaitent modéliser sa concentration (variable D) au cours du temps (variable t , l'unité de temps étant le mois). Pour cela, ils proposent l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dD(t)}{dt} = -kD(t) + f(t) \quad (\text{eq. 1})$$

LE terme $f(t)$ représente le taux auquel la vitamine est synthétisée et/ou absorbée au temps t et $\frac{dD(t)}{dt}$ la vitesse de variation de sa concentration. Le paramètre k est une constante strictement positive.

Question 1 Proposez une interprétation biologique pour le terme $-kD(t)$

- la vitesse d'accroissement de la vitamine
- la production de la vitamine par des sources autres que la synthèse ou l'absorption
- la vitesse de décroissance de la vitamine
- la disparition de la vitamine de l'organisme (par dégradation, évacuation ou utilisation par l'organisme)

Par la suite, nous mettrons cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{dD(t)}{dt} + kD(t) = f(t) \quad (\text{eq. 2})$$

Question 2 Cette forme permet de mettre *directement* l'équation sous la forme d'une équation différentielle :

- à variables séparables
 linéaire à coefficients constants sans second membre
 linéaire à coefficients constants avec second membre
 linéaire à coefficients non constants avec second membre

DANS un premier temps, on s'intéresse au cas d'une personne qui n'aurait aucun apport en vitamine D. On aurait alors $f(t) = 0$. L'équation 2 deviendrait alors :

$$\frac{dD(t)}{dt} + kD(t) = 0 \quad (\text{eq. 3})$$

Question 3 La solution générale de cette équation a pour forme $D(t) = Ae^{\alpha t}$, avec A et α deux constantes. Que vaut α ?

- k $\frac{1}{k}$ $-\frac{1}{k}$ $-k$

AU cours de l'hiver, la production endogène en vitamine D est quasi nulle car, les rayons du soleil entrant avec un angle trop incliné dans l'atmosphère, les UV sont en grande partie absorbés avant d'arriver au sol. La vitamine D est alors quasi entièrement apportée par l'alimentation, à un taux que nous supposons constant (paramètre strictement positif noté β). L'équation (2) décrivant la cinétique de la vitamine D devient alors :

$$\frac{dD(t)}{dt} + kD(t) = \beta \quad (\text{eq. 4})$$

Pour résoudre cette équation, les chercheurs décident de chercher une solution de la forme :

$$D(t) = A(t)e^{\alpha t} \quad (\text{eq. 5})$$

$A(t)$ étant une fonction que les chercheurs tenteront de déterminer par la suite.

Question 4 En remarquant la similitude entre la forme de la solution recherchée pour l'équation (4) et celle trouvée pour l'équation (3), quelle méthode diriez-vous que les chercheurs sont en train d'utiliser ?

- la solution particulière la variation de la constante
 les moindres carrés l'intégration par partie

Question 5 Déterminer $A(t)$ par cette méthode permet d'avoir accès à :

- une solution particulière de l'équation (4) la solution générale de l'équation (4)

Question 6 À partir de l'équation (5), que vaut la dérivée de la fonction $D(t)$ recherchée ?

- $[\frac{dA}{dt} + \alpha A(t)]e^{\alpha t}$ $[\frac{dA}{dt} - \alpha A(t)]e^{\alpha t}$ $\frac{dA}{dt} \alpha e^{\alpha t}$ $-\frac{dA}{dt} \alpha e^{\alpha t}$

En injectant la forme de $D(t)$ proposée par l'équation (5) et sa dérivée calculée à la question précédente dans l'équation (4), on obtient une nouvelle équation pour $A(t)$:

$$\frac{dA(t)}{dt} e^{\alpha t} = \beta \quad (\text{eq. 6})$$

CORRECTION

Question 7 Par résolution de l'équation (6), quelle solution obtient-on pour $A(t)$? (C étant une constante d'intégration)

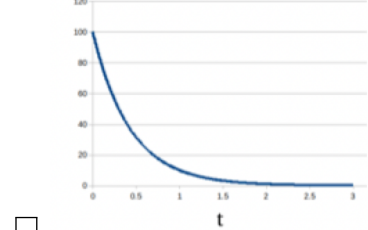
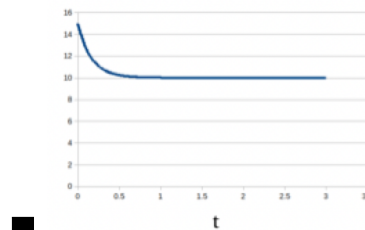
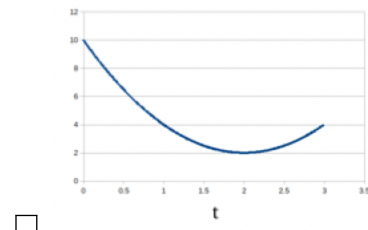
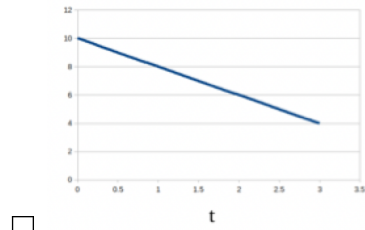
- $A(t) = \frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t} + C$
 $A(t) = \alpha e^{-\alpha t} + C$

- $A(t) = -\frac{\beta}{\alpha}e^{-\alpha t} + C$
 $A(t) = \beta\alpha e^{-\alpha t} + C$

Question 8 Comment s'exprime alors $D(t)$, la forme générale de la solution de l'équation (4)?

- $Ce^{\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}$ $Ce^{\alpha t} - \beta$ $Ce^{\alpha t} - \frac{\beta}{\alpha}$ $Ce^{\alpha t} + \beta$

Question 9 Laquelle des courbes ci-dessous pourrait être la représentation graphique de $D(t)$?

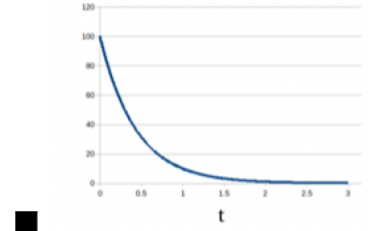
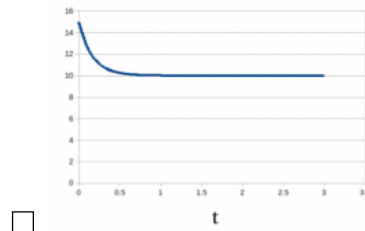
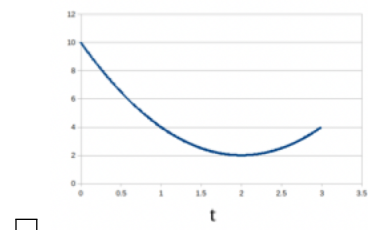
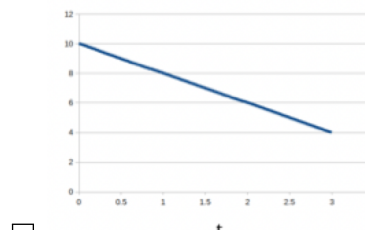


POUR finir, les chercheurs s'intéressent à la cinétique de la vitamine D à partir de début septembre ($t = 0$ correspond alors au 1^{er} septembre) date à partir de laquelle on considère que le taux de vitamine D produit par l'ensoleillement décroît suivant la fonction $S(t) = \gamma e^{-rt}$.

Question 10 Sachant qu'au 1^{er} novembre la production de vitamine D produit par l'ensoleillement est 100 fois plus faible qu'au 1^{er} septembre, que vaut alors le paramètre r ? On rappelle que l'unité de temps est le mois.

- $\ln(10)$ $\frac{2}{100}$ $\ln(50)$ $\frac{1}{100}$

Question 11 Si on suppose que l'apport lié à l'alimentation est nul, laquelle des courbes ci-dessous pourrait être la représentation graphique de $D(t)$?



Partie 2

Le manque de luminosité durant l'hiver, responsable d'un déficit en vitamine D, est à l'origine, chez certains individus, de la dépression saisonnière hivernale ou trouble affectif saisonnier (TAS). La luminothérapie constitue le traitement de référence (avant les antidépresseurs ou les psychothérapies) car il agit sur la régulation de la sérotonine, parfois appelée « l'hormone du bonheur ». Cette hormone gouverne la production de la mélatonine, une autre hormone responsable des cycles éveil-sommeil.

DANS un premier temps on souhaite estimer la moyenne de la teneur (Y) en sérotonine dans le sang de la population d'hommes adultes ayant toujours vécu en France, âgés de 20 à 30 ans et souffrant de TAS. Un échantillon de 12 individus a été obtenu à partir de la population des français âgés de 20 à 30 ans, souffrant de TAS, en tirant au hasard leur numéro de sécurité sociale. Parmi ces 12 individus, 10 avaient toujours vécu en France, 1 avait séjourné en Norvège et 1 en Afrique du Sud durant les 4 années précédant l'étude.

Question 12 Quelles sont les caractéristiques de l'échantillon prélevé ?

- Aléatoire simple et représentatif d'une population d'individus ayant toujours vécu en Norvège
 Aléatoire simple et représentatif d'une population d'individus ayant toujours vécu en Afrique du Sud
 Aléatoire simple et représentatif d'une population d'individus ayant toujours vécu en France
 Aléatoire simple et non représentatif d'une population d'individus ayant toujours vécu en France

EN excluant les 2 personnes ayant séjourné en dehors de France durant les années précédant l'étude, on a les données suivantes :

$$n = 10; \quad \sum_{i=1}^n y_i = 101,2 \text{ } \mu\text{g/l}; \quad \sum_{i=1}^n y_i^2 = 1077,4$$

Question 13 Donnez une estimation ponctuelle de la moyenne et de la variance de Y dans la population d'où sont issus les individus de l'échantillon TAS

- $\mu = 10,12$ et $\sigma^2 = 5,92$ $\bar{y} = 10,12$ et $s^2 = 5,33$
 $\hat{\mu} = 10,12$ et $\hat{\sigma} = 2,43$ $\hat{\mu} = 10,12$ et $\hat{\sigma}^2 = 5,92$

Question 14 Calculez l'intervalle de confiance associé à cette estimation au risque $\alpha = 0,05$

- 10,04-10,20 8,38-11,86 11,38-14,86 4,62-15,62

Question 15 À partir de la réponse à la question précédente, quelle inférence (conclusion au niveau de la population) pourriez-vous faire ?

- La teneur moyenne en sérotonine dans la population d'étude est comprise dans l'intervalle indiqué à la question précédente avec 95 % de risque que l'intervalle ne contienne pas la moyenne de la population
 La teneur moyenne en sérotonine dans la population d'étude est extérieure à l'intervalle indiqué à la question précédente avec une probabilité égale à 1 %
 La teneur moyenne en sérotonine dans la population d'étude est comprise dans l'intervalle indiqué à la question précédente avec 5 % de risque que l'intervalle ne contienne pas la moyenne de la population
 La teneur moyenne en sérotonine dans la population d'étude se situe à l'extérieur de l'intervalle indiqué à la question précédente avec une probabilité égale à 95 %

Partie 3

ON voudrait maintenant savoir si la teneur moyenne en sérotonine de la population souffrant de TAS est égale à celle de la population ne souffrant pas de TAS.

Question 16 Si on connaissait la teneur moyenne en sérotonine de la population ne souffrant pas de TAS, quel test statistique utiliser ?

- Un test du χ^2 d'ajustement Un test d'homoscédasticité
 Un test d'égalité/homogénéité entre deux moyennes Un test de conformité à une moyenne théorique

Question 17 Si on ne connaissait pas la teneur moyenne en sérotonine de la population ne souffrant pas de TAS, quel test statistique utiliser ?

- Un test d'homoscédasticité Un test du χ^2 d'ajustement
 Un test de conformité à une moyenne théorique Un test d'égalité/homogénéité entre deux moyennes

Question 18 Quelle est l'hypothèse nulle H_0 associée au test de la question précédente ?

- Les moyennes des 2 populations sont égales Les moyennes des 2 échantillons sont égales
 Les moyennes des 2 populations sont différentes Les moyennes des 2 échantillons sont différentes

Question 19 Quelles sont les conditions d'application associées à ce test, si la taille de l'échantillon prélevé de la population ne souffrant pas de TAS était égale à $n = 5$?

- Représentativité et indépendance (ou échantillon aléatoire simple), normalité de la teneur Y en sérotonine, homoscédasticité
 Représentativité et indépendance (ou échantillon aléatoire simple), normalité de la teneur Y en sérotonine
 Représentativité et indépendance (ou échantillon aléatoire simple), normalité de la teneur Y en sérotonine, effectifs observés supérieurs à 30

ON indique que la teneur moyenne en sérotonine dans un échantillon ($n = 5$) prélevé dans la population ne souffrant pas de TAS est égale à $60,2 \mu\text{g/l}$, que la valeur observée de la statistique du test de la question 17 est inférieure à la valeur théorique (pour $\alpha = 0,05$).

Question 20 À partir des indications précédentes, quelle interprétation vous paraît-elle possible ?

- On ne peut pas conclure que les deux populations présentent la même teneur moyenne en sérotonine car le risque de seconde espèce est égal à 5 %
 On peut conclure que les deux populations présentent la même teneur moyenne en sérotonine car $n = 5$
 On peut conclure que les deux populations présentent la même teneur moyenne en sérotonine car le risque α est connu
 On ne peut pas conclure que les deux populations présentent la même teneur moyenne en sérotonine car la puissance du test est inconnue

Partie 4

À l'aide d'un logiciel informatique, on simule le prélèvement de 100 000 échantillons aléatoires simples de taille $n = 2$ individus dans une population où le pourcentage de cas de TAS est égal à 4 %. Appelons X le nombre de cas de TAS obtenu à partir d'un échantillon de taille $n = 2$.

Question 21 Quelle loi de probabilité suit la variable X ?

- Loi normale Loi du χ^2
 Loi de BERNOULLI Loi binomiale

Question 22 Quelle est la probabilité que $X = 1$?

- 0,0400 0,7680 0,0922 0,0768

Question 23 Sachant que $P(X = 0) = 0,9216$, quelle est la valeur de $P(X = 2)$?

- 0,1600 0,0016 1,6000 0,0160

On prélève maintenant 100 échantillons aléatoires simples de taille $n = 2$ dans une population réelle où le pourcentage de cas de TAS est inconnu. On obtient les résultats suivants :

Nombre k_i de cas de TAS	0	1	2
Nombre d'échantillons présentant k_i cas de TAS	70	25	5
Nombre attendu d'échantillons présentant k_i cas de TAS sous l'hypothèse de 4 % de TAS	92,16	7,68	0,16

On désire savoir si la répartition observée du nombre de cas de TAS est compatible avec la répartition théorique.

Question 24 Quelle loi suit la statistique du test à réaliser sous l'hypothèse nulle ?

- Loi de POISSON Loi normale Loi binomiale Loi du χ^2

Question 25 Quelle est la valeur de la statistique observée (après avoir effectué les regroupements de classes si nécessaire) ?

- 62,64 22,56 67,97 55,33

Question 26 Quelle est la valeur de la statistique seuil (au risque $\alpha = 5\%$) ?

- 6,63 9,21 5,99 3,84

Question 27 Quelle conclusion tirez-vous du test (au risque $\alpha = 5\%$) ?

- Le nombre de cas de TAS suit la loi théorique et le risque d'erreur est égal à 0,05
 Le nombre de cas de TAS ne suit pas la loi théorique et le risque d'erreur est β inconnu
 Le nombre de cas de TAS suit la loi théorique et le risque d'erreur est β inconnu
 Le nombre de cas de TAS ne suit pas la loi théorique et le risque d'erreur est égal à 0,05

Question 28 Quelle interprétation vous paraît correcte ?

- La fluctuation d'échantillonnage est très compatible avec l'hypothèse alternative
 La fluctuation d'échantillonnage à elle seule ne suffit probablement pas à expliquer les écart entre les effectifs observés et les effectifs théoriques
 La fluctuation d'échantillonnage seule est très compatible avec les écarts entre les effectifs observés et les effectifs théoriques
 La fluctuation d'échantillonnage est peu compatible avec l'hypothèse nulle