Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
17 mai 2018
Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : □ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

1 Première partie

La population des États-Unis (EU) en 1800 et 1850 était de 5,3 et 23,1 millions d'habitants, respectivement. Afin de prédire la taille de la population des EU en 1900 et 1950, on construit un modèle exponentiel (dit aussi modèle de Malthus). On désigne par r le taux de croissance malthusien ($r > 0$) et par $P(t)$ la taille de la population des EU (en millions d'habitants) au temps t, avec t le temps écoulé depuis l'année 1800.

Question 1 Quelle est l'équation différentielle qui régit la dynamique de la population sous l'hypothèse du modèle exponentiel ?

- □ $\frac{dP(t)}{dt} = r$
- □ $\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)(1 - P(t))$
- □ $\frac{dP(t)}{dt} = -rP(t)$
- ■ $\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)$

Question 2 Quelle est la solution $P(t)$ de l'équation précédente pour la condition initiale $P(0) = P_0$?

☐ $P(t) = P_0 + rt$ ☐ $P(t) = P_0 + e^{rt}$ ■ $P(t) = P_0 e^{rt}$ ☐ $P(t) = P_0 e^{-rt}$

Question 3 D'après l'énoncé, quelle est la valeur numérique de la condition initiale ?

☐ $P_0 = 23,1$ ☐ $P_0 = 14,2$ ☐ $P_0 = +\infty$ ■ $P_0 = 5,3$

Question 4 D'après l'énoncé, quelle est la valeur numérique de $P(50)$?

☐ $P(50) = 5,3$ ☐ $P(50) = +\infty$ ■ $P(50) = 23,1$ ☐ $P(50) = 14,2$

Question 5 Sachant que $\ln(P(t)) = \ln(P_0) + rt$, donnez une valeur numérique approchée du paramètre r.

☐ $r = 0,0962$ ■ $r = 0,0294$ ☐ $r = 0,000796$ ☐ $r = 0,00249$

Question 6 Sous l'hypothèse du modèle exponentiel et avec les valeurs de P_0 et r que vous avez obtenues, donnez une estimation de la taille de la population des EU en 1900 (que l'on note P_{1900}).

☐ $P_{1900} = 436,03$ ■ $P_{1900} = 100,3$
☐ $P_{1900} = 76$ ☐ $P_{1900} = 9,638 \times 10^{24}$

On apprend qu'en réalité, en 1900, la taille de la population des EU était de 76 millions d'habitants. On nous demande alors de corriger le modèle pour mieux prédire la taille de la population des EU en 1950. Pour ce faire, on utilise le modèle suivant

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

avec $K > 0$ et $A = \frac{K}{P_0} - 1$. On nous donne $r = 0,0315$. La condition initiale P_0 n'a pas changé et garde la valeur numérique précédente.

Question 7 Comment s'appelle ce modèle ?

■ Modèle logistique ☐ Modèle de Gompertz
☐ Modèle exponentiel ☐ Modèle inverse

Question 8 Sous l'hypothèse de ce nouveau modèle, quelle est la limite de $P(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

☐ P_0 ☐ $+\infty$ ■ K ☐ K/P_0

Question 9 D'après les nouvelles données sur la populations des EU, que vaut le paramètre K ?

☐ $K = 23,1$ ☐ $K = 5,3$ ■ $K = 188,7$ ☐ $K = 76$

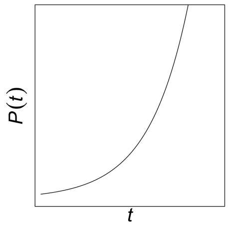
Question 10 Que représente biologiquement le paramètre K ?

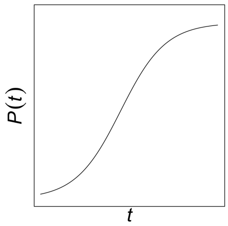
☐ Le temps nécessaire à la population des EU pour doubler
■ La taille maximale de la population des EU
☐ Le nouveau taux de croissance de la population des EU
☐ La taille de la population des EU en 1900

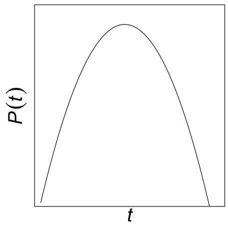
Question 11 Sous l'hypothèse du nouveau modèle et avec les valeurs numériques des paramètres dont vous disposez, quelle taille pouvez-vous prédire pour la population des EU en 1950 ? On notera cette taille P_{1950}.

☐ $P_{1950} = 152$ ☐ $P_{1950} = 76$ ■ $P_{1950} = 144,4$ ☐ $P_{1950} = 188,7$

Question 12 Quelle est la représentation graphique de $P(t)$?

☐ 

■ 

☐ 

Question 13 Que représente la quantité $\frac{1}{150}\int\limits_{0}^{150} P(t)dt$?

■ La taille moyenne de la population des EU entre 1800 et 1950
☐ La surface occupée par les habitants des EU entre 1800 et 1950
☐ L'augmentation du nombre d'habitants aux EU entre 1800 et 1950
☐ La probabilité de survie des habitants des EU entre 1800 et 1950

2 Deuxième partie

Pour dénombrer une population bactérienne, cultivée en milieu liquide, on réalise des comptages à l'aide d'une cellule de Thoma. C'est une petite cuve, finement quadrillée, dans laquelle on dépose un volume connu de la culture bactérienne. Le quadrillage facilite le comptage des bactéries au microscope. On voudrait tester l'hypothèse que la répartition des bactéries dans la cellule se fait au hasard. Pour cela on s'intéresse au nombre de bactéries présentes dans un carreau donné. Selon l'hypothèse de répartition aléatoire : une bactérie donnée pourra ou non se trouver dans ce carreau. La probabilité p qu'une bactérie se trouve dans ce carreau est constante, quelle que soit la bactérie considérée ; elle est égale à $\frac{1}{m}$ avec m le nombre total de carreaux de la cellule.

Question 14 Quelle est la variable aléatoire à étudier ?

☐ X : nombre total de carreaux dans la cellule
☐ X : nombre total de bactéries dans la cellule
☐ X : probabilité p
■ X : nombre de bactéries par carreau

Question 15 En ne considérant qu'une seule bactérie ($n = 1$), quel loi de probabilité utiliseriez-vous pour X ?

■ Loi de Bernouilli ☐ Loi de Poisson
☐ Loi de Student ☐ Loi normale

Question 16 Sachant qu'il y a au total $n = 327$ bactéries dans la cellule, et sous l'hypothèse de répartition aléatoire des bactéries dans la cellule, quelle est la loi probabilité de X ?

■ Loi binomiale ☐ Loi de Bernouilli
☐ Loi du χ^2 ☐ Loi de Student

LES résultats d'une expérience de comptage - réalisée avec une cellule comportant 100 carreaux, dans une population de *Bacillus subtilis* - sont donnés dans le tableau suivant :

Nombre de bactéries par carreau	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Nombre de carreaux contenant x bactéries	5	15	21	20	18	10	2	3	3	0	2	1

Question 17 À quelle valeur est égal le premier paramètre de la loi de X, n ?

- ☐ 12
- ☐ $\frac{1}{100}$
- ■ 327
- ☐ 100

Question 18 À quelle valeur est égal le second paramètre de la loi de X, p ?

- ■ $\frac{1}{100}$
- ☐ $\frac{1}{327}$
- ☐ $\frac{99}{100}$
- ☐ $\frac{1}{12}$

Question 19 En théorie (sous l'hypothèse de répartition aléatoire des bactéries), combien devrions-nous observer de carreaux ne contenant pas de bactérie ?

- ☐ $327,00$
- ■ $3,74$
- ☐ $12,35$
- ☐ $5,00$

Question 20 Par quelle loi pourriez-vous approximer la loi exacte utilisée précédemment ?

- ☐ Loi de BERNOUILLI
- ■ Loi de POISSON
- ☐ Loi normale
- ☐ Loi binomiale

LE tableau ci-dessous indique les effectifs théoriques attendus sous la loi de probabilité exacte de X et selon l'approximation :

X	Exacte	Approximation
0	3,74	3,80
1	12,35	12,43
2	20,95	20,32
3	22,93	22,15
4	18,76	18,11
5	12,24	11,84
6	6,64	6,45
7	3,07	3,02
8	1,24	1,23
9	0,44	0,45
10	0,14	0,15
11	0,04	0,04

Question 21 Pourquoi les effectifs des deux colonnes sont-ils proches ?

- ☐ Car $n \geq 50$, $np \leq 10$ et $\lambda = np = 1$
- ☐ Car $n \geq 50$, $np \leq 10$ et $\lambda = np = 3,27$
- ■ Car $n \geq 50$, $np \leq 5$ et $\lambda = np = 3,27$
- ☐ Car $n \geq 50$, $np \leq 5$ et $\lambda = np = 1$

Question 22 Quel test statistique proposeriez-vous pour tester l'hypothèse de répartition aléatoire des bactéries dans la cellule ?

- ☐ Un test t de comparaison de moyenne d'une variable aléatoire discrète
- ☐ Un test d'ajustement à une loi de variable aléatoire continue
- ☐ Un test t de comparaison de moyenne d'une variable aléatoire continue
- ■ Un test du χ^2 d'ajustement à une loi de variable aléatoire discrète

Question 23 On note, pour chaque valeur de X, n_i^t l'effectif théorique et n_i^o l'effectif observé. Pour calculer la valeur de la statistique observée du test, quel calcul intermédiaire proposez-vous ?

☐ $\frac{(n_i^o - n_i^t)^2}{n_i^o}$ ☐ $\frac{(n_i^o - n_i^t)}{n_i^t}$ ☐ $\frac{(n_i^o - n_i^t)}{n_i^o}$ ■ $\frac{(n_i^o - n_i^t)^2}{n_i^t}$

Question 24 Quelle condition d'application du test devez-vous respecter ?

☐ Le χ^2 seuil doit être supérieur à $0,05$
☐ Le χ^2 calculé doit être supérieur à $0,05$
■ Les effectifs théoriques doivent être supérieurs à 5
☐ Les effectifs observés doivent être supérieurs à 5

Question 25 Sous l'hypothèse nulle que la répartition des bactéries dans la cellule est conforme au modèle de répartition aléatoire, la statistique du test suit une loi caractérisée par un nombre de degrés de liberté égal à :

■ 5 ☐ 4 ☐ 10 ☐ 11

Question 26 Sous l'hypothèse que la répartition des bactéries dans la cellule est bien aléatoire, et si l'on avait réalisé un nombre très élevé d'expériences similaires à celle indiquée en début de sujet puis calculé, pour chacune des expériences, la valeur observée de la statistique, cette dernière aurait été supérieure à la valeur seuil de la statistique dans :

☐ Environ 95 % des cas ☐ Environ 99 % des cas
■ Environ 5 % des cas ☐ Environ 1 % des cas

3 Troisième partie

La bactérie *Bacillus subtilis* n'est pas considérée comme pathogène pour l'homme, mais elle peut contaminer des aliments et peut exceptionnellement provoquer une intoxication alimentaire. Elle peut être responsable de la présence de zones collantes ou gluantes dans le pain. À l'aide de la méthode de dénombrement utilisée dans la deuxième partie, des chercheurs ont voulu savoir si le nombre moyen de cette bactérie dans le pain fabriqué dans un supermarché était conforme à la norme autorisée. Imaginons que la norme autorise un nombre moyen maximal par baguette de pain de 300 bactéries et que l'écart-type de la variable « nombre de bactéries par baguette » calculé sur la population de baguettes étudiée est égal à 30. À partir d'un échantillon aléatoire simple de $n = 50$ baguettes dans le supermarché, on obtient $\sum_{i=1}^{n} x_i = 14900$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 4482250$.

Question 27 Quelle est la valeur de la moyenne, $\bar{x}$, de l'échantillon ?

☐ 497 ☐ 49,7 ☐ 29,8 ■ 298

Question 28 Quelle est la valeur de l'écart-type, S_x, de l'échantillon ?

☐ 841 ☐ 89645 ☐ 2670,5 ■ 29

Question 29 Quel test proposez-vous pour répondre à l'objectif de l'étude ?

■ Un test de conformité de moyenne
☐ Un test de conformité de variance
☐ Un test d'homogénéité de deux moyennes
☐ Un test d'homogénéité de deux variances

Question 30 Quelle est la valeur observée, en valeur absolue, de la statistique du test ?

- ☐ 3,33
- ☐ 0,047
- ☐ 0,33
- ■ 0,47

Question 31 En prenant un risque α égal à 5 % que concluez-vous quant à l'hypothèse de conformité (l'échantillon appartient à une population de baguette dans laquelle le nombre moyen de bactéries par baguette est bien égal à 300) ?

- ■ Elle ne peut être rejetée avec un risque β inconnu de me tromper
- ☐ Elle ne peut être rejetée avec un risque β connu de me tromper
- ☐ Elle ne peut être rejetée avec un risque de 5 % de me tromper
- ☐ Elle ne peut être rejetée avec un risque de 95 % de me tromper

Question 32 Si l'on avait répété un nombre très élevé de fois la même expérience et calculé l'intervalle de confiance de la moyenne pour chacune de ces expériences similaires :

- ☐ Environ 95 % des valeurs de μ serait contenu dans l'intervalle de confiance
- ☐ Environ 5 % des valeurs de μ serait contenu dans l'intervalle de confiance
- ■ Environ 95 % des intervalles de confiance contiendrait μ
- ☐ Environ 5 % des intervalles de confiance contiendrait μ

4 Quatrième partie

Le dernier objectif de l'étude est de savoir (au risque $\alpha = 0,05$) si un deuxième supermarché présente le même nombre moyen de bactéries par baguette que celui analysé dans la troisième partie avec $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$. À partir d'un échantillon aléatoire simple prélevé dans ce second supermarché de taille $n = 50$, on trouve que la moyenne et la variance de l'échantillon sont respectivement égales à 600 et 784.

Question 33 La valeur seuil de la statistique est égale à :

- ☐ 2,576
- ☐ 1,645
- ☐ 0,674
- ■ 1,96

Question 34 La valeur observée de la statistique est :

- ☐ Incalculable car les conditions d'application du test ne sont pas satisfaites
- ☐ Inférieure à la valeur seuil
- ☐ Égale à la valeur seuil
- ■ Supérieure à la valeur seuil

Question 35 La conclusion du test est :

- ☐ Le nombre moyen de bactéries est le même dans les deux échantillons avec un risque de se tromper de 95 %
- ☐ Le nombre moyen de bactéries par baguette varie entre les deux échantillons avec un risque de se tromper de 95 %
- ☐ Le nombre moyen de bactéries est le même dans les deux échantillons avec un risque de se tromper de 5 %
- ■ Le nombre moyen de bactéries par baguette varie entre les deux populations avec un risque de se tromper de 5 %

Question 36 La puissance associé à ce test est :

- ☐ La probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse
- ☐ La probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est vraie
- ■ La probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse
- ☐ La probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est vraie

- Fin du sujet -