Chapitre 4

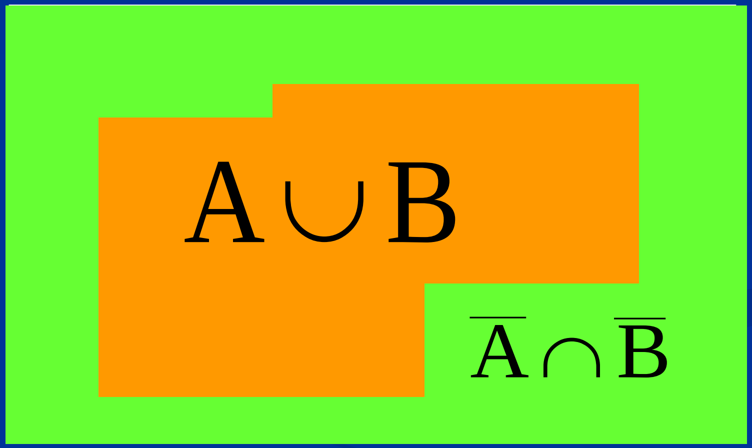
Probabilités

Espaces probabilisés

A ou B

$A \cup B$

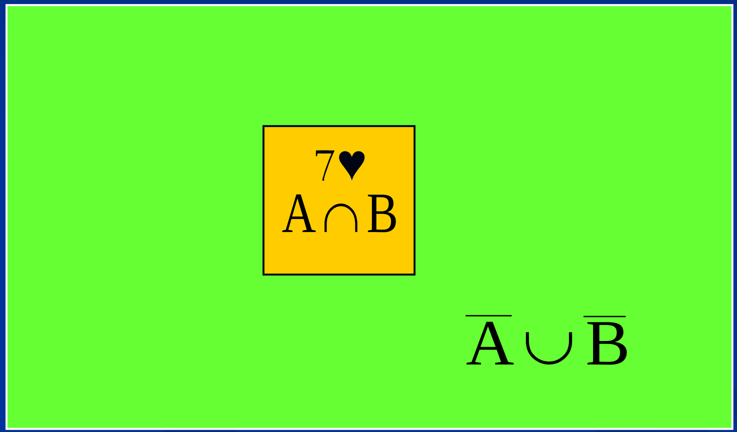
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



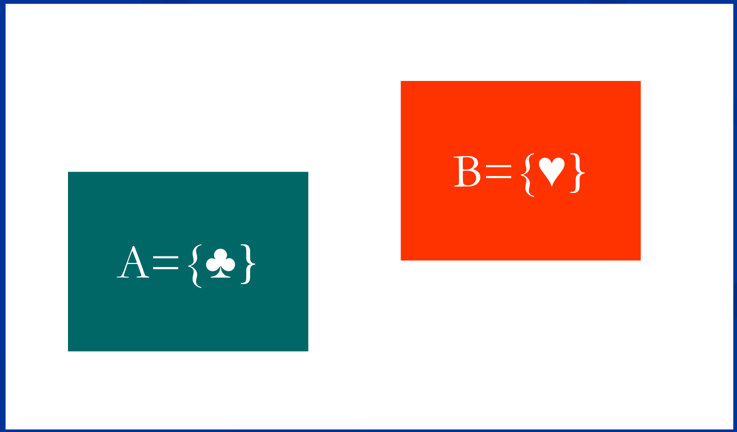
Espaces probabilisés

$$\text{A et B} = A \cap B$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



$$A \cap B = \phi$$



Probabilités

Propriétés

a) $\forall A \in \Omega,\ p(A) \geq 0$

b) $p(\Omega) = 1$

c) $\forall A, B \in \Omega \quad \text{si } A \cap B = \phi$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

$\text{si } A_i \cap A_j = \phi \quad \forall\, i \neq j$

$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \ldots \cup A_k) = p(A_1) + \ldots + p(A_i) + \ldots p(A_k)$

Probabilités

Propriétés

d) $$p(A) = \sum_{i=1}^{k} p_i \left(= \frac{k}{N} \text{ si équiprobabilité}\right)$$

e) $$\text{si } \Omega \text{ est } \infty, \Omega = \{e_1, e_2, \ldots e_n \ldots\} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p(e_i) = 1$$

f) $$A \cup \overline{A} = \Omega \quad A \text{ et } \overline{A} \text{ sont incompatibles}$$

$$\text{donc } p(A \cup \overline{A}) = p(A) + p(\overline{A}) = p(\Omega) = 1$$

$$\text{d'ou } \quad p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

Probabilités

Propriétés

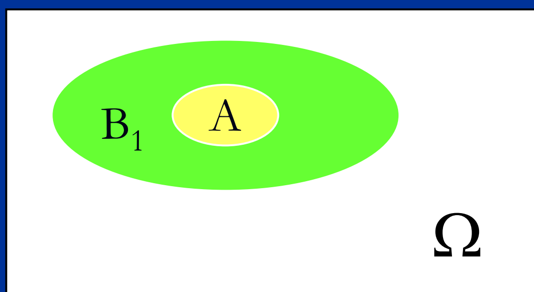
g)

$$\Omega \cup \phi = \Omega \qquad \Omega \text{ et } \phi \text{ sont incompatibles}$$

$$\text{donc } p(\Omega \cup \phi) = p(\Omega) + p(\phi) = p(\Omega) = 1$$

$$\text{d'ou } p(\phi) = 0$$

h)



$$\textit{si } A \subset B,\ B = B_1 + A,\ A \text{ et } B_1 \text{ incompatibles}$$

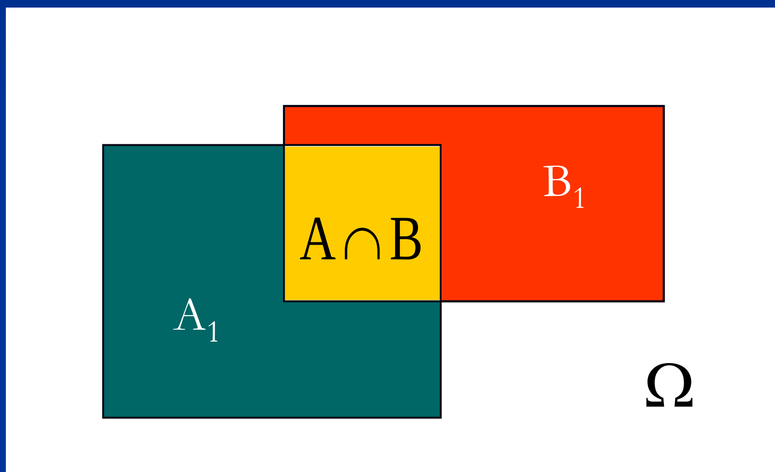
$$p(A \cup B_1) = p(B) = p(A) + p(B_1)$$

$$\Rightarrow p(A) \le p(B)$$

Probabilités

Propriétés

i)



$$A_1,\ A\cap B \text{ et } B_1 \text{ incompatibles}$$

$$p(A) = p(A_1) + p(A\cap B)$$

$$=> p(A_1) = p(A) - p(A\cap B)$$

$$p(B) = p(B_1) + p(A\cap B)$$

$$=> p(B_1) = p(B) - p(A\cap B)$$

$$p(A\cup B) = p(A_1) + p(B_1) + p(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$$

Probabilités conditionnelles

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \quad \text{et} \quad p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$$p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$$

$$p(A/B) = \frac{p(B/A)p(A)}{p(B)}$$

Probabilités conditionnelles

Si {B1,B2…..Bi….Bn} système complet

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i)p(A/B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$$

Théorème de Bayes

$$p(B_k/A) = \frac{p(A/B_k)p(B_k)}{\sum_{i=1}^{n}[p(A/B_i)p(B_i)]}$$

Probabilités conditionnelles

	A	$\overline{A}$	
B	$p(A \cap B)$	$p(\overline{A} \cap B)$	$p(B)$
$\overline{B}$	$p(A \cap \overline{B})$	$p(\overline{A} \cap \overline{B})$	$p(\overline{B})$
	$p(A)$	$p(\overline{A})$	1

$$p(B/A) = \frac{p(A/B)p(B)}{p(A)}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A/B)p(B)}{p(A \cap B) + p(A \cap \overline{B})}$$

Probabilités conditionnelles

Indépendance stochastique

$$p(B/A) = p(B/\overline{A})$$

$$\text{Or, } p(A \cap B) = p(B/A)p(A) \text{ et } p(\overline{A} \cap B) = p(B/\overline{A})p(\overline{A})$$

$$\text{Et } p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B) = p(B/A)p(A) + p(B/\overline{A})p(\overline{A})$$

$$p(B) = [p(A) + p(\overline{A})]\,p(B/A)$$

$$\Leftrightarrow p(B) = p(B/A) = p(B/\overline{A})$$