

Chapitre 6

Lois de probabilité

Lois discrètes

1. Loi uniforme

Toutes les valeurs prises par la variable aléatoire ont la même probabilité

Si n est le nombre de valeurs prises par X alors:

$$\forall i, \quad p(X = x_i) = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} (x_i - E(X))^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - E(X)^2$$

Lois discrètes



2. Loi de Bernoulli (ou loi alternative simple)

On appelle **variable de Bernoulli** ou variable *indicatrice*, la variable aléatoire X telle que :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / \Omega = \{ \text{échec, succès} \} \text{ et } X(\Omega) = \{ 0, 1 \}$$

Loi de probabilité: $p(X=0)=q$ et $p(X=1)=p$ avec $p+q=1$

Elle est appelée **loi de Bernoulli**, notée **$B(1,p)$**

$$E(X) = p$$

$$V(X) = pq$$

Lois discrètes

3. Loi Binomiale (ou loi alternative répétée)

On appelle **variable Binomiale** une variable aléatoire X correspondant à la somme de n variables de Bernoulli :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que}$$

$$X(\Omega^n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Exemple: X = nombre de filles dans les fratries de 4 enfants

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

p : probabilité d'avoir une fille à chaque naissance = $1/2$

Loi de probabilité

$X=0$	GGGG	q^4	0.0625
$X=1$	FGGG, GFGG, GGFG, GGGF	$4q^3p$	0.25
$X=2$	FFGG, FGFG, FGGF, GFFG, GFGF, GGFF	$6q^2p^2$	0.375
$X=3$	FFFG, FFGF, FGFF, GFFF	$4qp^3$	0,25
$X=4$	FFFF	p^4	0,0625
			somme = 1

Indépendance statistique $p(G \cap G \cap G \cap G) = q.q.q.q = q^4$

Lois discrètes

3. Loi Binomiale (ou loi alternative répétée)

On appelle **variable Binomiale** une variable aléatoire X correspondant à la somme de n variables de Bernoulli :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que}$$

$$X(\Omega^n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Loi de probabilité:
$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad \text{avec} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

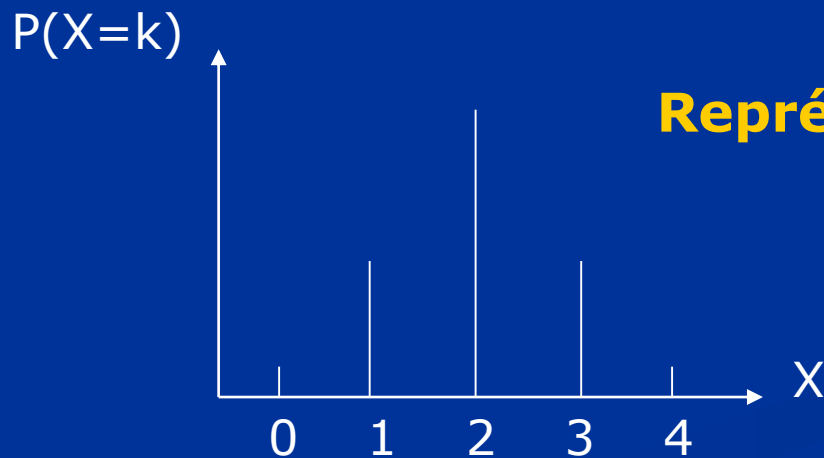
Elle est appelée **loi Binomiale**, notée **B(n,p)**

Loi de probabilité ? $\rightarrow \sum$ des probabilités = 1

$$\sum_{k=0}^n p(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = 1?$$

$$\text{Or, } \forall a, b \in R, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^n p(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$



Représentation: diagramme en bâtons

Formule de récurrence pour le **calcul des probabilités**

On pose:
$$p(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$p(X = k - 1) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1}$$

On calcule:
$$\frac{p(X = k)}{p(X = k - 1)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{n!} \frac{p^k}{p^{k-1}} \frac{q^{n-k}}{q^{n-k+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(X = k)}{p(X = k - 1)} = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{p}{q}$$

$$\Leftrightarrow p(X = k) = \frac{(n-k+1)}{k} \frac{p}{q} p(X = k - 1)$$

Lois discrètes

3. Loi Binomiale (ou loi alternative répétée)

Formule de récurrence pour le **calcul des probabilités**

Exemple: fratries de 4 enfants

$$P(X=3) = \frac{4-3+1}{3} \times \frac{0.5}{0.5} \times p(X=2) = \frac{2}{3} \times 0,375 = 0,25$$

Lois discrètes

3. Loi Binomiale (ou loi alternative répétée)

On appelle **variable Binomiale** une variable aléatoire X correspondant à la somme de n variables de Bernoulli :

$$X = \sum_{i=1}^n X_i : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que}$$

$$X(\Omega^n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Loi de probabilité: $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Elle est appelée **loi Binomiale**, notée **B(n,p)**

$$E(X) = np$$

$$V(X) = npq$$

Lois discrètes

3. Loi Binomiale (ou loi alternative répétée)

Exemple: X: nb de filles dans les fratries de 4 enfants

$$\mathcal{B}(4, 1/2)$$

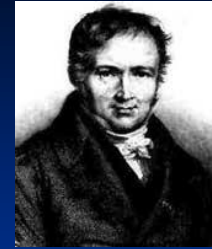
$$E(X) = np = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 \text{ filles en moyenne}$$

$$V(X) = npq = 2 \times 1/2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{écart-type} = 1$$

Probabilité d'avoir au moins 3 filles dans les fratries de 4

$$P(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) = 4p^3q + p^4 = 0,25 + 0,0625 = 0,3125$$

Lois discrètes



4. Loi de Poisson

Dans le cas d'une **variable de Poisson**, les événements se produisent les uns à la suite des autres, de façon aléatoire dans l'espace ou le temps.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Loi de probabilité:

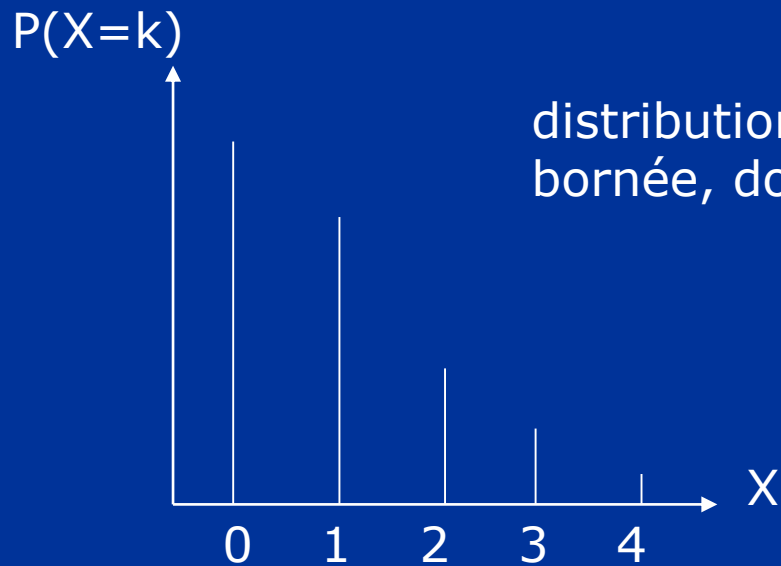
$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{avec } \lambda > 0$$

Elle est appelée **loi de Poisson**, notée **$P(\lambda)$**

Lois discrètes

4. Loi de Poisson

Représentation graphique: diagramme en bâton



distribution très dissymétrique car $p \ll q$ et n'est pas bornée, donc X peut prendre des valeurs jusqu'à l'infini

$$\sum_{k=0}^{\infty} p(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

En effet, le développement limité de e au voisinage de 0 est:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{\infty} p(X = k) = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Par convention: pour $k=0$, $\lambda^0=1$ et $0!=1$

Lois discrètes

4. Loi de Poisson

Formule de récurrence:

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \dots \text{et} \dots p(X = k - 1) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\text{d'où} \dots \frac{p(X = k)}{p(X = k - 1)} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda}} \frac{\lambda^k}{\lambda^{k-1}} \frac{(k-1)!}{k!}$$

$$\Rightarrow p(X = k) = \frac{\lambda}{k} p(X = k - 1)$$

Lois discrètes



4. Loi de Poisson

Dans le cas d'une **variable de Poisson**, les événements se produisent les uns à la suite des autres, de façon aléatoire dans l'espace ou le temps.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } X(\Omega) = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Loi de probabilité:

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{avec } \lambda > 0$$

Elle est appelée **loi de Poisson**, notée **$P(\lambda)$**

$$E(X) = \lambda$$

$$V(X) = \lambda$$

Lois discrètes

4. Loi de Poisson

Lorsque le nombre d'épreuves dans une loi Binomiale tend vers l'infini et que la probabilité de succès tend vers 0, la loi binomiale tend vers la loi de Poisson

Approximation de la loi Binomiale par une loi de Poisson

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$ et $n \geq 50$ et $np \leq 5$ alors $X \rightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda = np = E(X)$

Démonstration :

Exemple:

Dans une population, la probabilité d'apparition d'une maladie génétique est de 0.001.

On tire un échantillon de 100 individus.

Quelle est la probabilité que 2 individus soient malades ?

X: nb d'individus malades parmi 100

$$X \sim \mathcal{B}(100, 0.001)$$

$$P(X=2) = \frac{100!}{2! 98!} (0.001)^2 (0.999)^{98} = 0.00449$$

Approximation par la loi de Poisson:

$$\lambda = np = 0.1 \quad X \sim \mathcal{P}(0.1)$$

$$P(X=2) = \frac{e^{-0.1} (0.1)^2}{2!} = 0.00452 \sim 0.00449$$

Lois discrètes

6. Loi géométrique (loi de Pascal)

Une variable géométrique correspond au nombre d'épreuves de Bernoulli nécessaires pour obtenir 1 succès:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

Loi de probabilité:

$$p(X = n) = q^{n-1} p$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Lois discrètes

6. Loi Binomiale négative

Une variable binomiale négative correspond au nombre d'épreuves nécessaires pour obtenir k succès:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que}$$
$$X(\Omega) = \{k, k+1, \dots, n, \dots\}$$

Loi de probabilité:

$$p(X = n) = C_{n-1}^{k-1} q^{n-k} p^k$$

$$E(X) = \frac{k}{p}$$

$$V(X) = k \frac{q}{p^2}$$

Lois discrètes

7. Loi hypergéométrique

Une variable hypergéométrique correspond à l'observation de k succès lors de n épreuves sans remise :

$$X : \Omega^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que } X(\Omega^n) = \{0, 1, \dots, n\}$$

Loi de probabilité:

$$p(X = k) = \frac{C_{n_1}^k C_{n_2}^{n-k}}{C_N^n} \text{ avec } N = n_1 + n_2$$

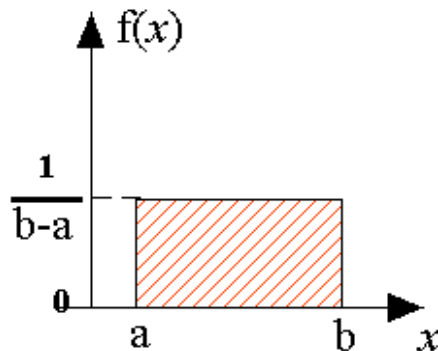
$$E(X) = \frac{n n_1}{N}$$

$$V(X) = n \frac{N - n_1}{N - 1} \frac{n_1 n_2}{N^2}$$

Lois continues

1. Loi uniforme continue

Une variable aléatoire continue est **uniforme** sur $[a,b]$ si la valeur de sa fonction densité de probabilité est constante pour tout $x \in [a,b]$



Fonction de densité de probabilité

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b] \text{ et } f(x) = 0 \text{ si } x \notin [a, b]$$

$$p(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} [x]_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}$$

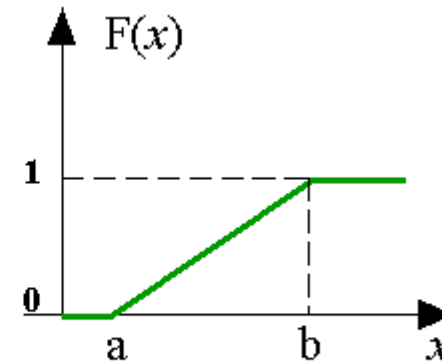
Lois continues

1. Loi uniforme continue

Fonction de répartition:

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a} \quad \text{si } x \in [a, b]$$

$$F(x) = 0 \text{ si } x < a, \quad F(x) = 1 \text{ si } x > b$$



Fonction de répartition

$$E(X) = \frac{b + a}{2}$$

$$V(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$$

Lois continues



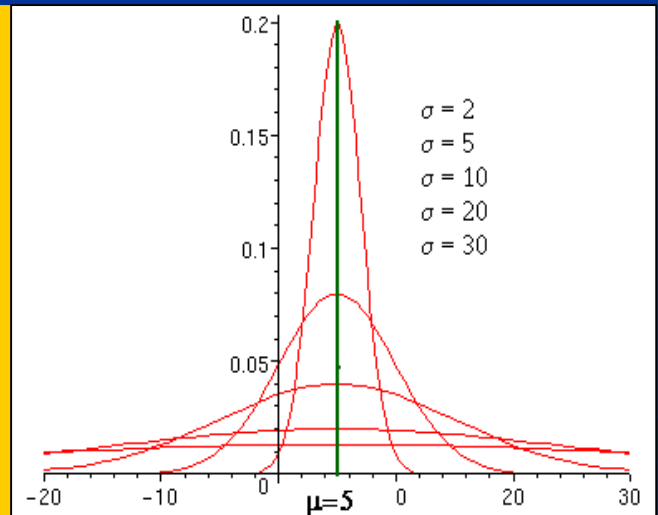
2. Loi de Gauss ou loi normale

Une variable aléatoire est une variable normale quand elle dépend d'un grand nombre de causes indépendantes dont aucune n'est prépondérante

notée

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$N(\mu, \sigma) \quad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

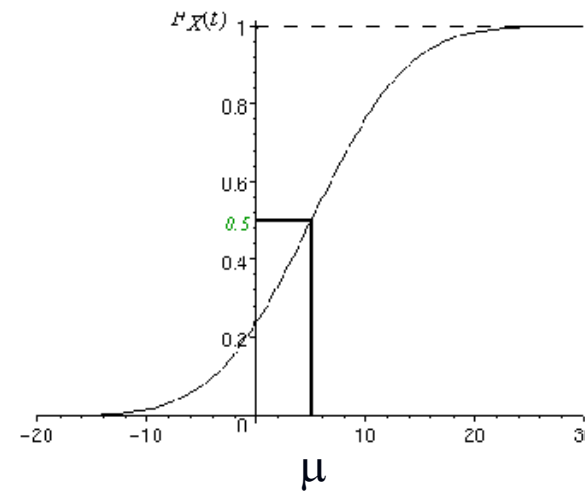


Lois continues

2. Loi de Gauss ou loi normale

Fonction de répartition

$$F(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$



$$E(X) = \mu$$

$$V(X) = \sigma^2$$

Lois continues

3. Loi normale centrée-réduite

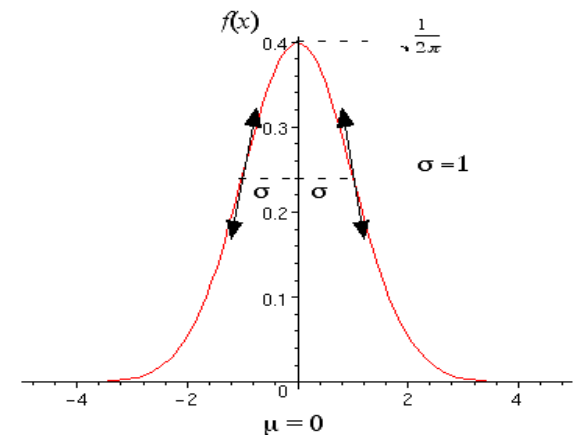
Une variable normale centrée-réduite a pour densité de probabilité :

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

notée

$N(0,1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



$$E(X) = 0$$

$$V(X) = 1$$

Lois continues

3. Loi normale centrée-réduite

$$P(U < a) = \Pi(a)$$

exemple

$$P(U < 0,36) = \Pi(0,36)$$

On lit la valeur dans la table

$$\Pi(0,36) = 0,6406$$

TABLE 2

Loi normale. Table de la fonction $\Pi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

La table donne les valeurs de $\Pi(u)$ pour u positif. Lorsque u est négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

u	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
$\Pi(u)$	0,9772	0,9821	0,9861	0,9893	0,9918	0,9938	0,9953	0,9965	0,9974	0,9981

Exemple : pour $u = + 1,37$
pour $u = - 1,37$

$\Pi(u) = 0,9147$
 $\Pi(u) = 0,0853$

Lois continues



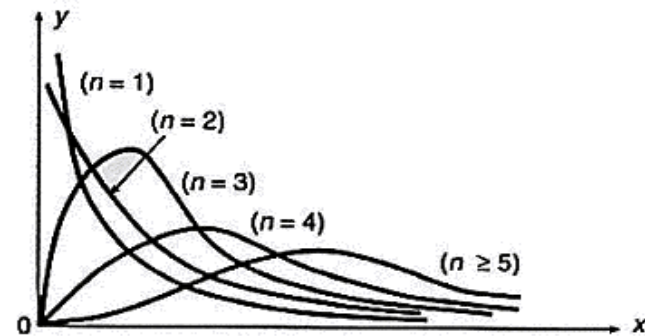
4. Loi du χ^2 de Pearson

On appelle χ^2 à n degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 \dots + X_i^2 \dots + X_n^2 \quad \text{avec } X_i \sim N(0,1)$$

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(\chi^2) = c \chi^{n-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2}$$



$$E(\chi^2) = n$$

$$V(\chi^2) = 2n$$

Lois continues



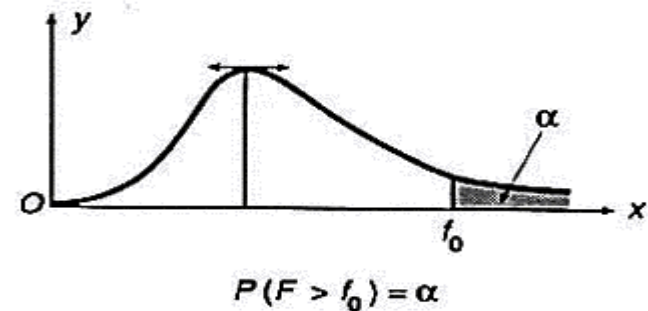
5. Loi de Fisher-Snedecor

On appelle F à n et p degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$F = \frac{U/n}{V/p} \quad \text{avec} \quad U \sim \chi^2 \text{ à } n \text{ ddl et } V \sim \chi^2 \text{ à } p \text{ ddl}$$

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(F) = c F^{\frac{n}{2}-1} (p + nF)^{-\left(\frac{n+p}{2}\right)}$$



$$E(F) = \frac{p}{p-2}$$

$$V(F) = 2 \frac{p^2 (n + p - 2)}{n(p - 2)^2 (p - 4)}$$

Lois continues

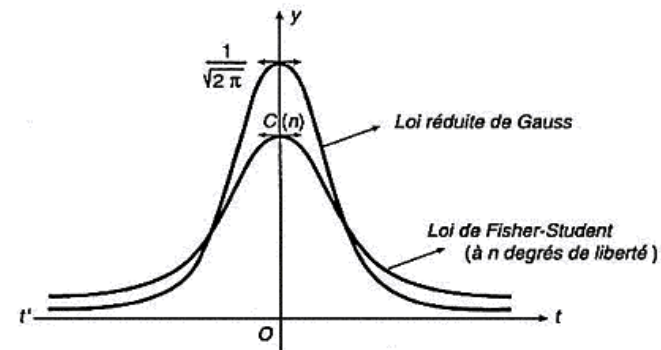
6. Loi de Student

On appelle T à n degrés de liberté la variable aléatoire définie par :

$$T = \frac{U}{\sqrt{V/n}} \quad \text{avec } U \sim N(0,1) \text{ et } V \sim \chi^2 \text{ à } n \text{ ddl}$$

Densité de probabilité: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$f(T) = c \left(1 + \frac{T^2}{n} \right)^{-\left(\frac{n+1}{2} \right)}$$



$$E(T) = 0$$

$$V(T) = \frac{n}{n-2}$$

Théorème central limite

Soit la variable aléatoire S résultant de la **somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi**, on construit la variable

centrée réduite telle que :
$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{(\sigma\sqrt{n})}$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition $F(t) = P(Z < t)$ est telle

que :
$$F_n(t) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
 quand $n \rightarrow \infty$ c'est à dire $N(0,1)$.