Chapitre 2

Primitives - Intégration

Définition

L'intégration est l'opération inverse de la dérivation:

g est la dérivée de la fonction f $\Leftrightarrow$ f est la primitive de la fonction g

$$g(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = \int g(u)du$$

La variable u dans la formule est une variable muette, elle peut être remplacée par n'importe quelle autre variable

$$\int g(u)du = \int g(z)dz = \int g(t)dt = \int g(x)dx$$

Il faut juste faire attention à ne pas utiliser une variable déjà réservée

$\Rightarrow$ Ne pas écrire $f(x) = \int g(x)dx$

Par coutume, on note le plus souvent les primitives avec des majuscules:
F est la primitive de f, G de g,…

Propriété: linéarité

$$\int [af(x) + b\, g(x)]dx = a \int f(x)dx + b \int g(x)\, dx$$

Constantes d'intégration

La dérivée d'une constante étant égale à 0, l'intégration se fait toujours « à une constante près »

Soit F une primitive de f, C une constante, alors:

$(F(x)+C)' = F'(x) = f$

$\Rightarrow$ F + C est aussi une primitive de f

On ne parle donc pas de « la » primitive de f, mais « d'une » primitive de f

Constantes d'intégration

La dérivée d'une constante étant égale à 0, l'intégration se fait toujours « à une constante près »

Soit F une primitive de f, C une constante, alors:

$$(F(x)+C)' = F'(x) = f$$

$\Rightarrow$ F + C est aussi une primitive de f

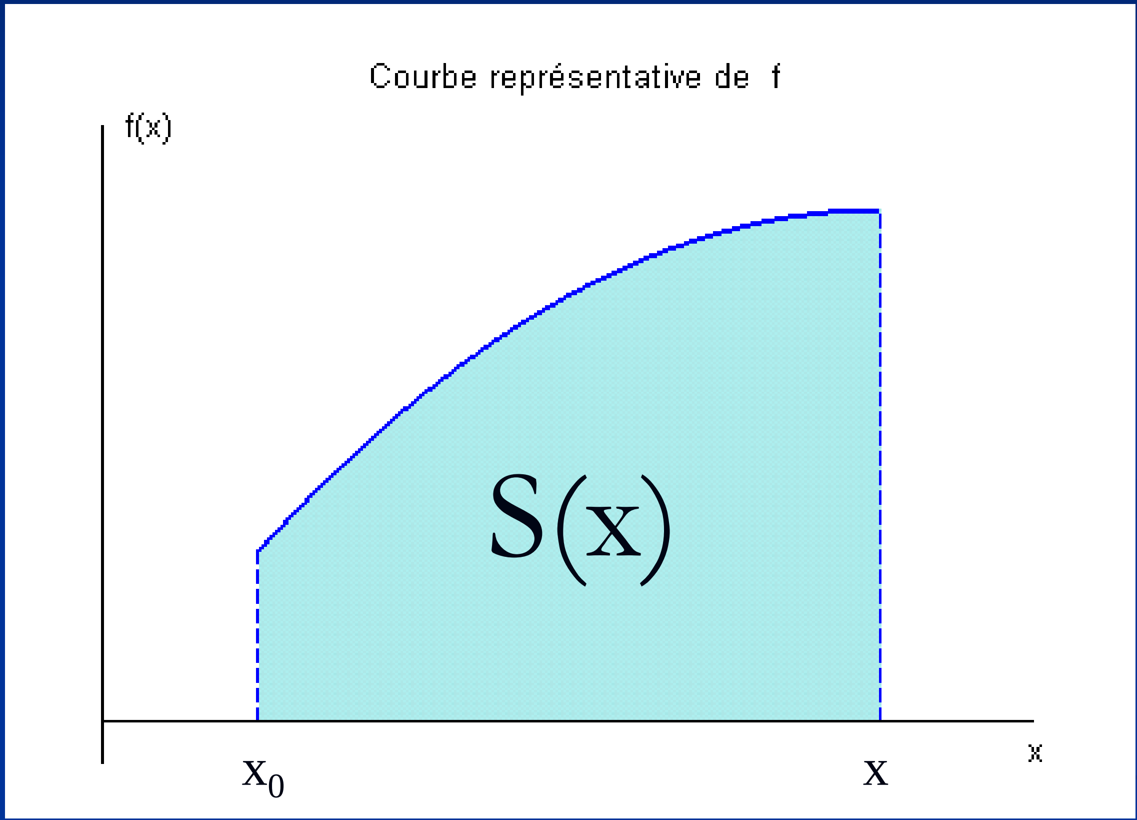
On ne parle donc pas de « la » primitive de f, mais « d'une » primitive de f

La constante d'intégration peut être calculée si on connait une valeur particulière de la primitive.

Ex: si F est une primitive de f, alors, la primitive de f valant b lorsque x = a est F + C, avec:

$$F(a)+C = b \Leftrightarrow C = b - F(a)$$

Interprétation géométrique



$S(x)$ = aire sous la courbe représentative de f entre x_0 et x

Calculons la dérivée de la fonction S

Interprétation géométrique

S'(x) = f

Comme $$\int_{x_0}^{x} f(u)du = F(x) - F(x_0)$$

L'intégrale entre x0 et x de f <u>est une primitive</u> de f, donc:

$$S(x) = \int_{x_0}^{x} f(u)du + C$$

On montre facilement que C = 0, donc L'intégrale entre x0 et x de f est l'aire sous la courbe entre x0 et x

Pareillement, on a: $$\boxed{\int_{a}^{b} f(u)du = \mathit{Aire\ sous\ la\ courbe\ représentative\ de\ } f \mathit{\ entre\ } a \mathit{\ et\ } b}$$

Primitives classiques

f(x)	F(x)
a	$ax+C$
$U'U^n$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}+C$
$-U'\sin(U)$	$\cos(U)+C$
$U'\cos(U)$	$\sin(U)+C$
$\frac{U'}{U}$	$\ln\lvert U\rvert+C$
$U'e^U$	e^U+C
$U'(1+tg^2U)$	$tg(U)+C$

<u>Exos:</u>

Primitives de:

$x^2 + \sin(2x)$

$2\cos(x)/\sin^2(x)$

$x\exp(3x^2)$

$x^2(1+x^3)^4$

Décomposition en éléments simples

Objectif: déterminer la primitive de fractions rationnelles (quotient de polynômes)

Principe: écrire la fraction rationnelle comme une somme de fractions rationnelle dont on sait calculer la primitive

Exemple:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+3)}$$

Intégration par partie

Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions dérivables sur un même intervalle $[a,b]$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(x) = u(x)v'(x)$. Alors :

$$\int f(x)\,dx = \int u(x)v'(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

La formule provient de la dérivée de uv

La même formule marche pour le calcul d'intégrale

Intégration par partie

Règle approximative du choix de u et v

A=Arctan, Arcsin, Arccos, Argth,Argsh,Argch

L=Logarithmes

P=Polynômes

E=Exponentielles

S=Sin, cos, tan, sh, ch, th

On dérivera le terme le plus à gauche dans le mot, on intègrera l'autre

<u>Exemple:</u>

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Intégration par changement de variable

$$\int_a^b u'(x)f\big(u(x)\big)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$$

<u>Exemple:</u>

$$\int_0^1 xe^{-x^2}dx$$

<u>Remarque</u>: la formule est surtout pratique mais jamais indispensable, on peut calculer directement les intégrales en identifiant une forme du type u'(x)f'(u(x))

Propriétés des intégrales

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

$$f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

$$f(x) \leq g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Relation de CHASLES : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Valeur moyenne

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$