Mathématiques

David Fouchet

Laboratoire
Biométrie et Biologie Evolutive

http://mathsv.univ-lyon1.fr

Mathématicien de formation (L1 au M1)

Laboratoire de Biométrie et Biologie Evolutive (M2 à aujourd'hui)

Enseignant-chercheur (maître de conférence)

<u>Thème de recherche</u>: épidémiologie mathématique des maladies infectieuses (ex: analyse de la dynamique de contamination du FIV chez le chat)

- $\Rightarrow$ Statistiques
- $\Rightarrow$ Modélisation

Organisation du semestre

Date	Slot 1 ACEG	Slot 1 BDFH	Slot 2 ACEG	Slot 2 BDFH	Slot 3 ACEG	Slot 3 BDFH
mar 19 janv						
mar 26 janv		TD2	CM2-DFO		TD2	
mar 2 févr		TD4	CM4-DFO		TD4	
mar 9 févr		TD6	CM6-DFO		TD6	
mar 16 févr		TT1	CM8-FME		TT1	
mar 23 févr						
mar 1 mars		TT2	CM10-FME		TT2	
mar 8 mars		TT3	CM12-FME		TT3	
mar 15 mars		TD10	CM13-FME		TD10	
mar 22 mars		TD11	CM14-FME		TD11	
mar 29 mars		TD13	CM16-FME		TD13	
mar 5 avr				TD15	TD15	
mar 12 avr				TD17	TD17	
mar 19 avr						
mar 26 avr				TT4	TT4	
mar 3 mai				TT6	TT6	
mar 10 mai				TT7	TT7	

Date	Slot 1 ACEG	Slot 1 BDFH	Slot 2 ACEG	Slot 2 BDFH	Slot 3 ACEG	Slot 3 BDFH
jeu 21 janv	TD1		CM1-DFO			TD1
jeu 28 janv	TD3		CM3-DFO			TD3
jeu 4 févr	TD5		CM5-DFO			TD5
jeu 11 févr	TD7		CM7-FME			TD7
jeu 18 févr	TD8		CM9-FME			TD8
jeu 25 févr						
jeu 3 mars	TD9		CM11-FME			TD9
jeu 10 mars						
jeu 17 mars	CC-1 (mutualisé seq2-seq3)					
jeu 24 mars	TD12		CM15-FME			TD12
jeu 31 mars	TD14			TD14		
jeu 7 avr	TD16			TD16		
jeu 14 avr	CC2					
jeu 21 avr						
jeu 28 avr	TT5			TT5		
jeu 5 mai						
jeu 12 mai						
sam 0 janv	CC-3 (mutualisé seq2-seq3)					

ANALYSE | **PROBABILITES - STATISTIQUES**

Cours magistraux	CM
Travaux Dirigés	TD
Travaux Tutorés	TT

David Fouchet	DFO
Frédéric Menu	FME

Organisation du semestre

Environ : $\frac{1}{3}$ Analyse + $\frac{1}{3}$ Probabilités + $\frac{1}{3}$ Statistiques

- Cours Magistraux 24 heures
- Travaux Dirigés 25.5 heures
- Travaux Tutorés 10.5 heures
- Évaluations en CCI (Contrôle Continu Intégral)

Organisation du semestre

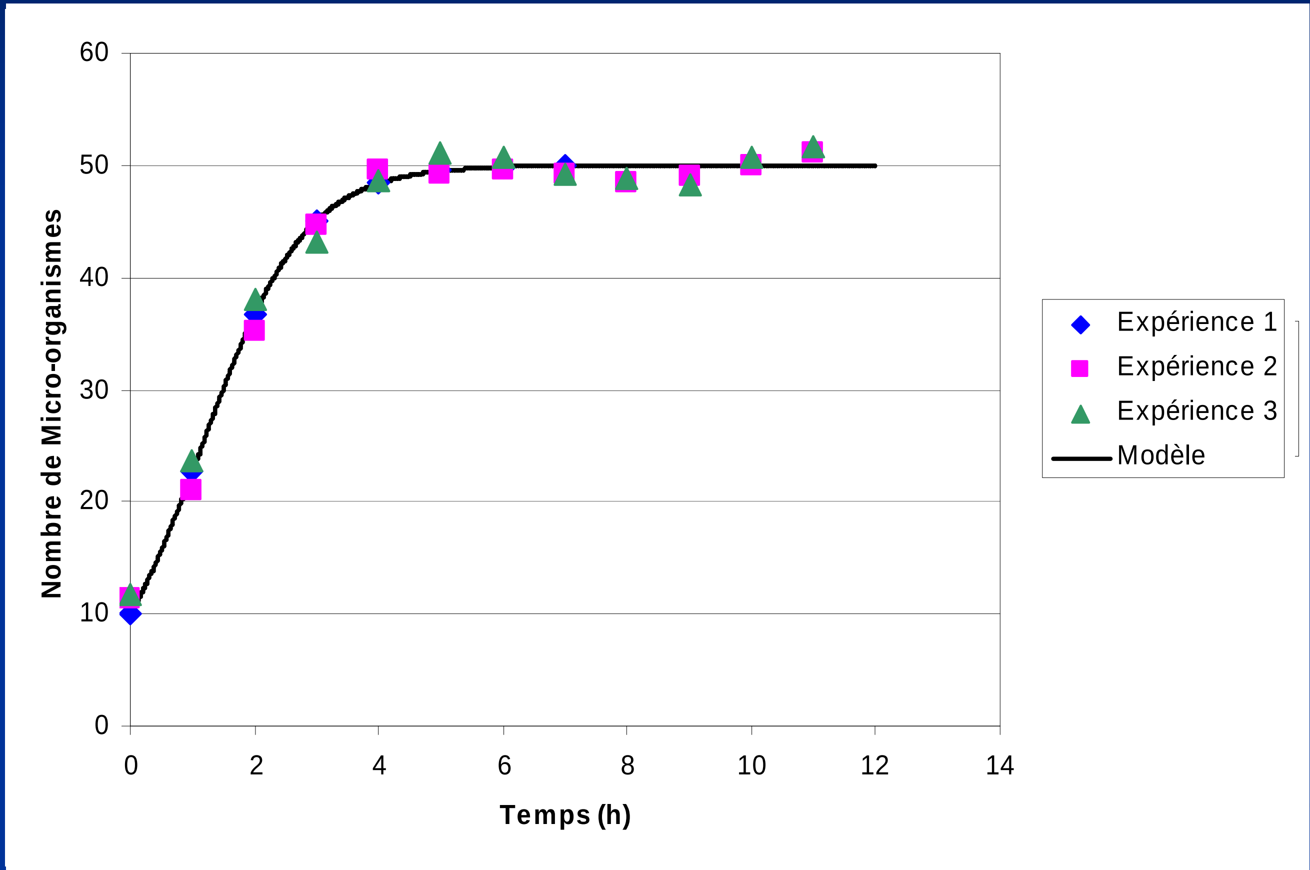
Coef.	Matière	Date	Format
30	Analyse	CC1	QCM + problème
25	Probabilités	CC2	QCM
25	Statistiques	CC3	Problème
15	TT	CC3	QCM
05	Participation	TT	En séance

Objectif général du cours

- Apprendre à utiliser le langage mathématique pour résoudre des situations où interviennent des phénomènes biologiques

- Apprendre les concepts de base et se familiariser avec les usages et les significations de ces concepts en fonction de la situation biologique

Déterminisme et Hasard



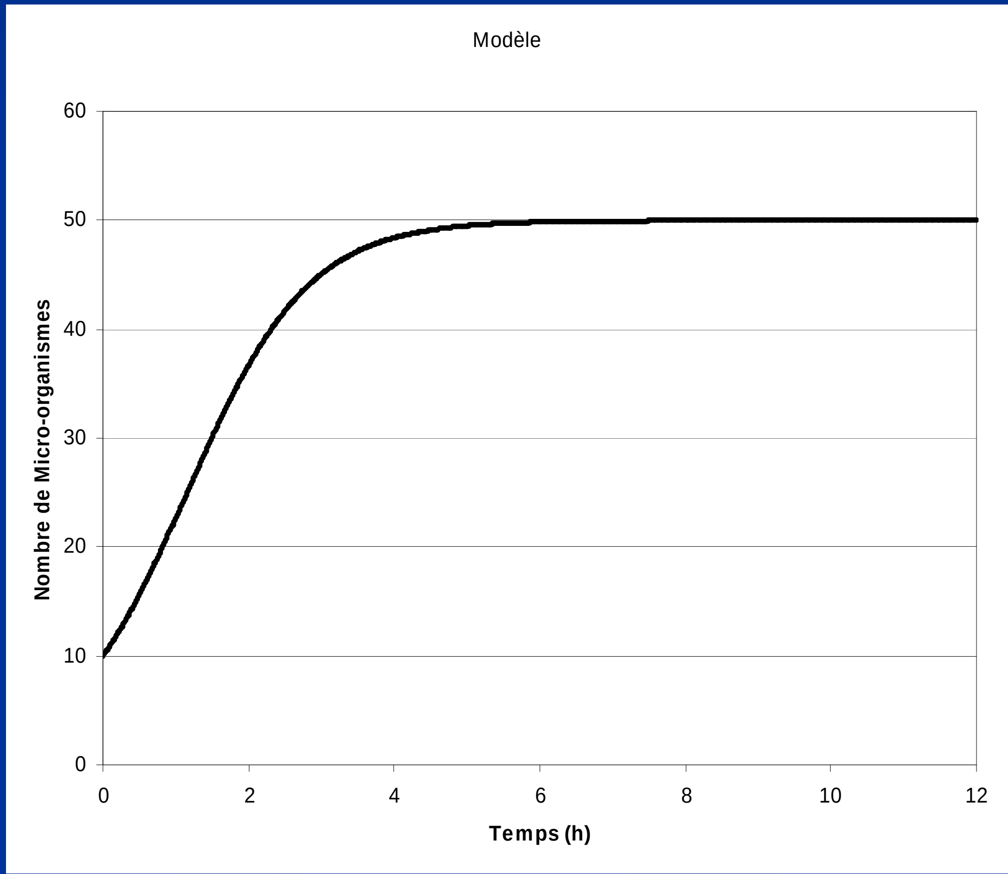
Peut-on prédire l'évolution au cours du temps d'un phénomène biologique ?

Partie déterministe

Modéliser le phénomène par une fonction

Déterminer les propriétés de la fonction

Interpréter en termes biologiques

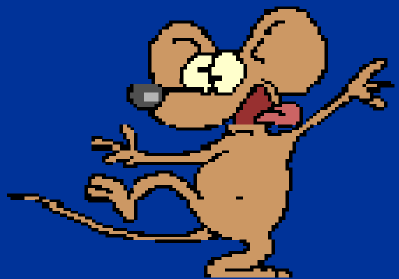


Chapitre 1

Fonctions - Généralités

La température d’un lézard (y) en fonction de la température de l'air à l'ombre (x) est approximativement

$$y = f(x) = x$$



La température d’une souris (z) en laboratoire est approximativement

$$z = c$$

avec c constante

Application de R dans R qui à un reel x de R fait correspondre un réel UNIQUE $y = f(x)$ dans R.

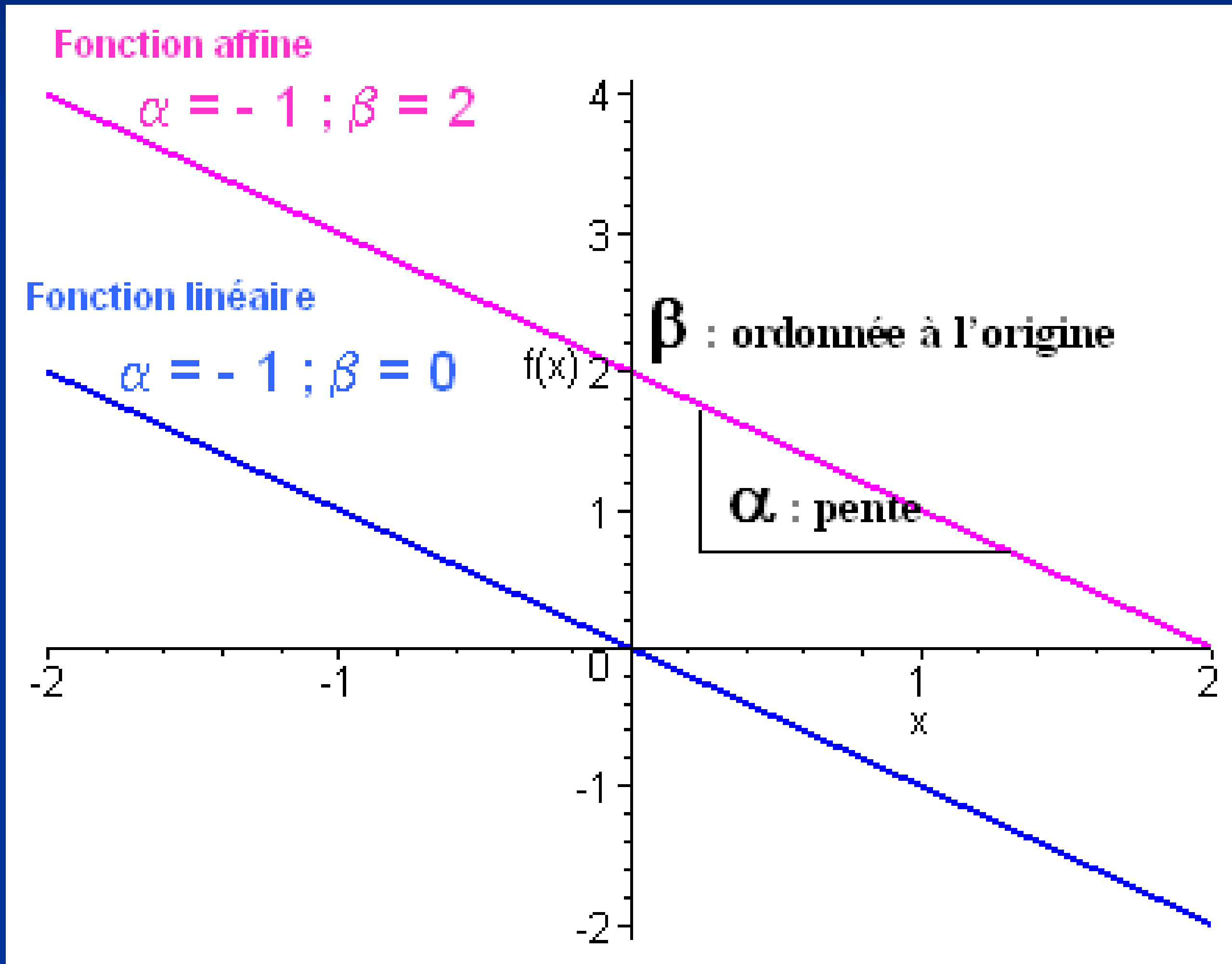
Fonctions usuelles

- Fonctions polynômes
- Fonctions trigonométriques
- La fonction logarithme népérien : *ln*
- La fonction exponentielle : *e*

Polynômes

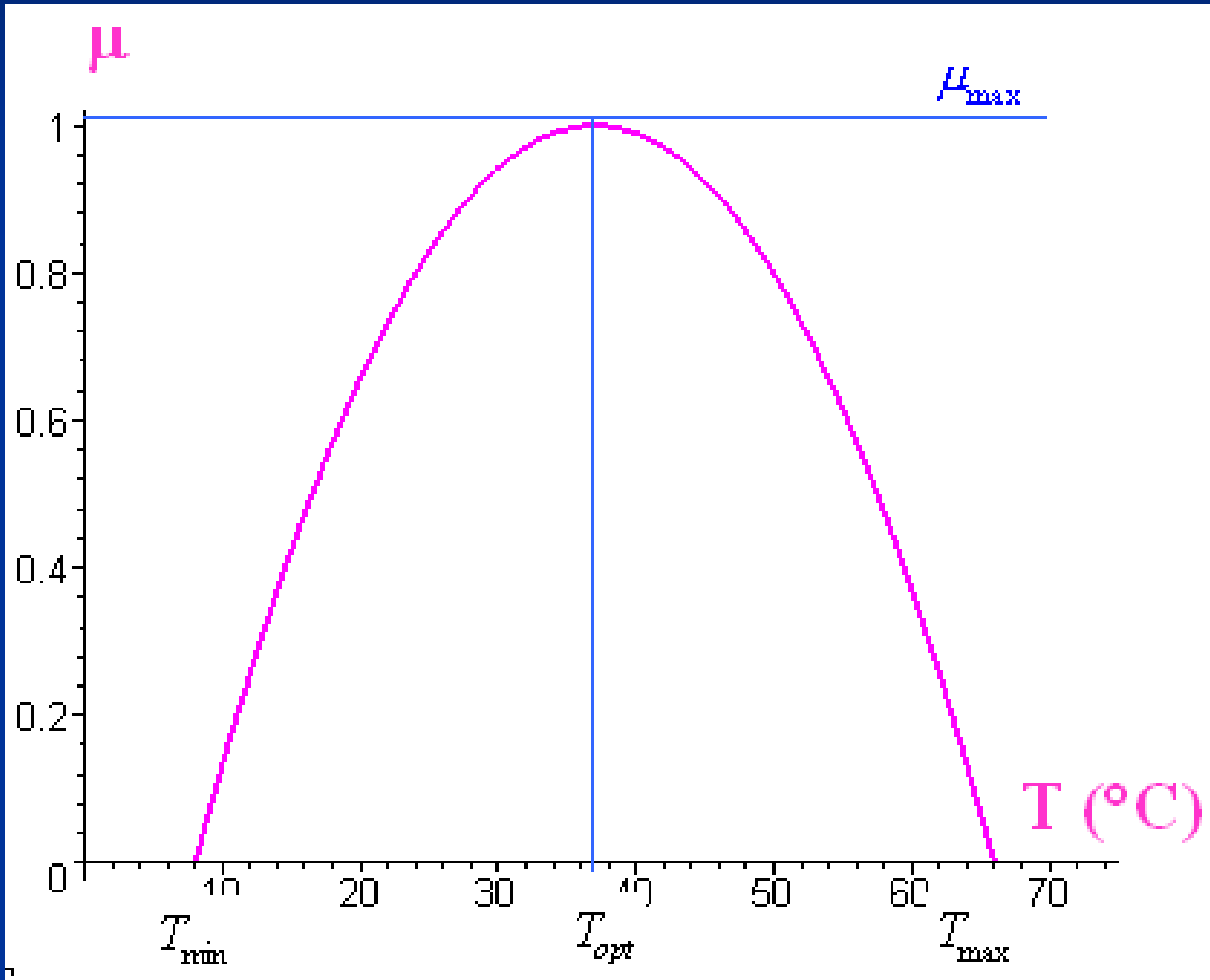
$f(x) = ax + b$	Fonction linéaire
$f(x) = ax^2 + bx + c$	Trinôme de degré 2
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Polynôme de degré 3
$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Polynôme de degré 4

Polynômes



Fonction affine
α = - 1 ; β = 2
Fonction linéaire
α = - 1 ; β = 0
β : ordonnée à l'origine
α : pente
f(x)
x
4
3
2
1
0
-1
-2
-2
-1
1
2

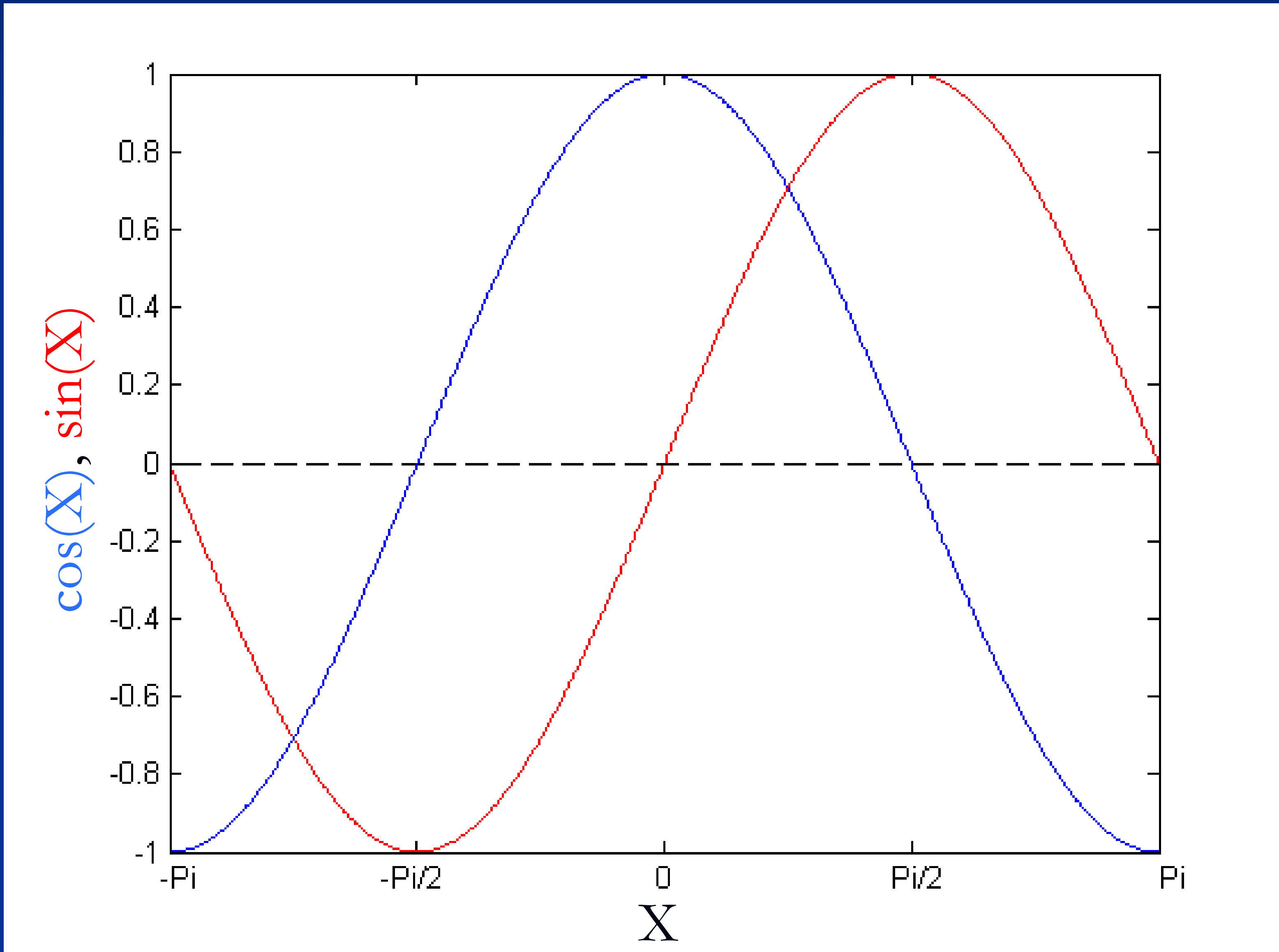
$$\mu = -T^2 + aT + b$$



Fonctions trigonométriques

$$f(x) = \mathrm{acos}(cx) + bsin(cx)$$

Fonctions trigonométriques



$\text{Cos}(\pi) = -1$

$\text{Cos}(\pi/2) = 0$

$\text{Cos}(0) = 1$

$\text{Sin}(\pi) = 0$

$\text{Sin}(\pi/2) = 1$

$\text{Sin}(0) = 0$

Fonctions trigonométriques

Formules de base

$\mathrm{Cos}(-x) = \mathrm{Cos}(x)$ (Cos = fonction paire)
$\mathrm{Sin}(-x) = -\mathrm{Sin}(x)$ (Sin = fonction impaire)

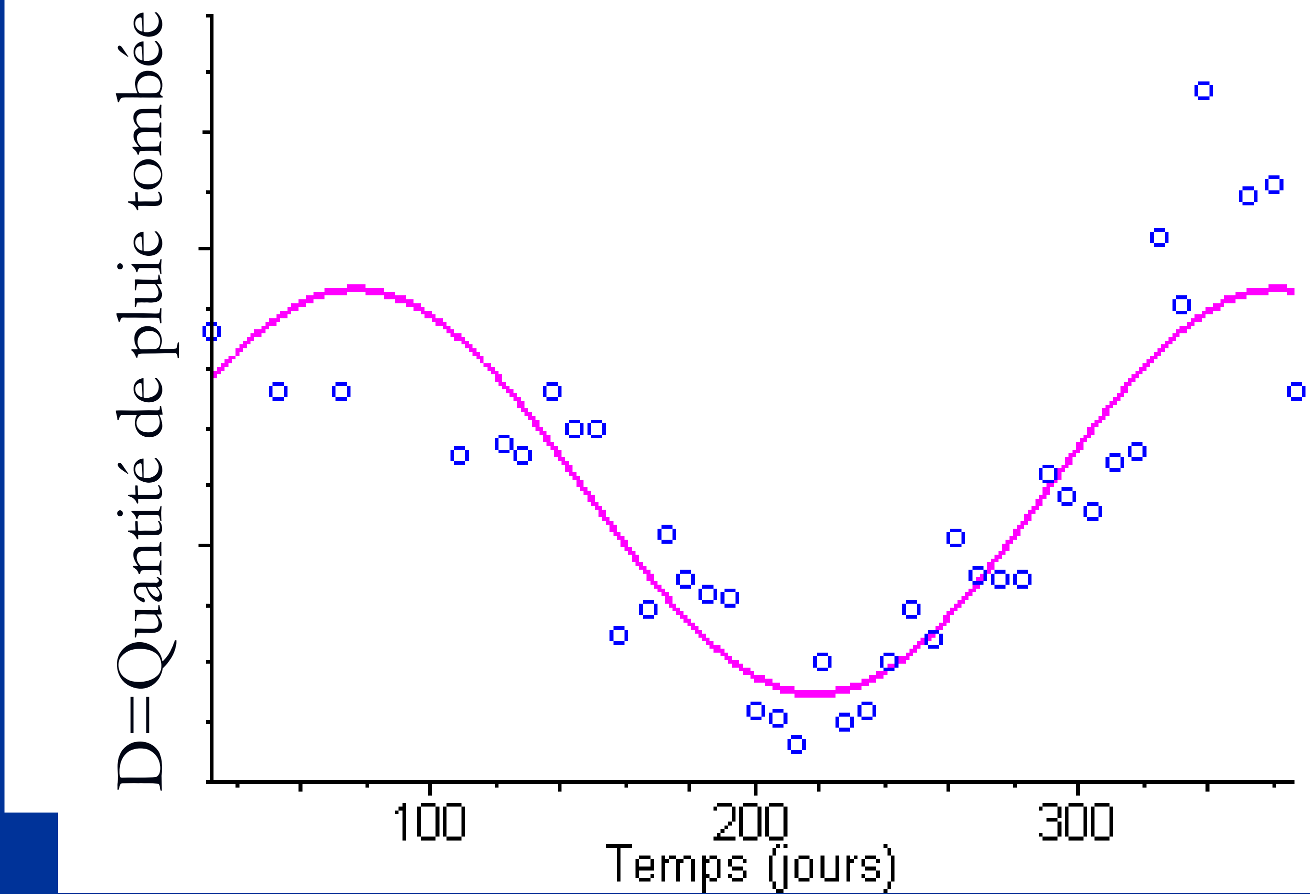
$\mathrm{Cos}^2(x) + \mathrm{Sin}^2(x) = 1$

Pour k entier (positif ou négatif)
$\mathrm{Cos}(x+2k\pi) = \mathrm{Cos}(x)$ et $\mathrm{Sin}(x+2k\pi) = \mathrm{Sin}(x)$
$\Rightarrow$ Cos et Sin périodique de période 2π

$\mathrm{Cos}(x) = \mathrm{Sin}(\pi/2 - x)$ et $\mathrm{Sin}(x) = \mathrm{Cos}(\pi/2 - x)$

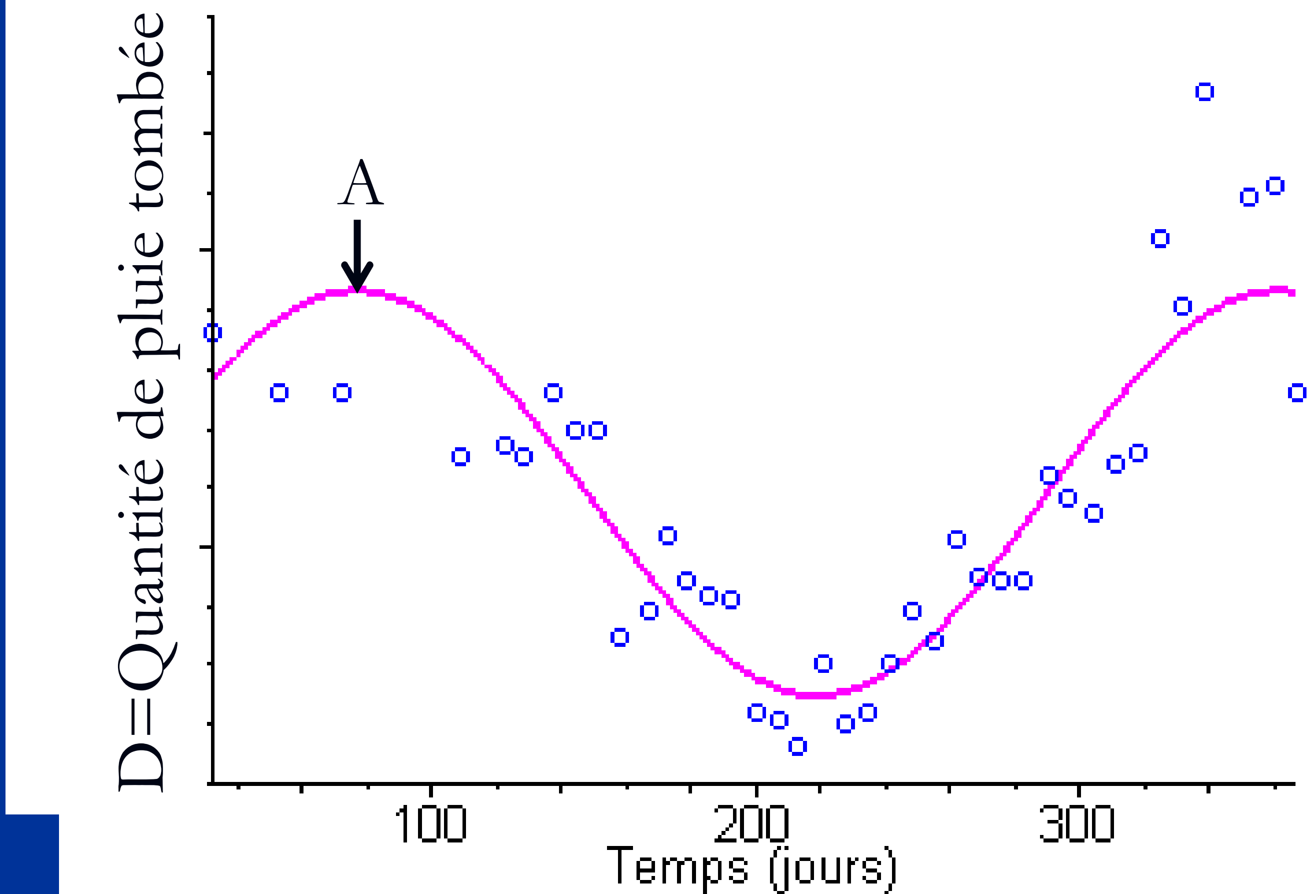
Fonctions trigonométriques

$$D = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta = f(t)$$



Fonctions trigonométriques

$$D = \alpha \cos\left(\omega t + \varphi\right) + \beta = f\left(t\right)$$



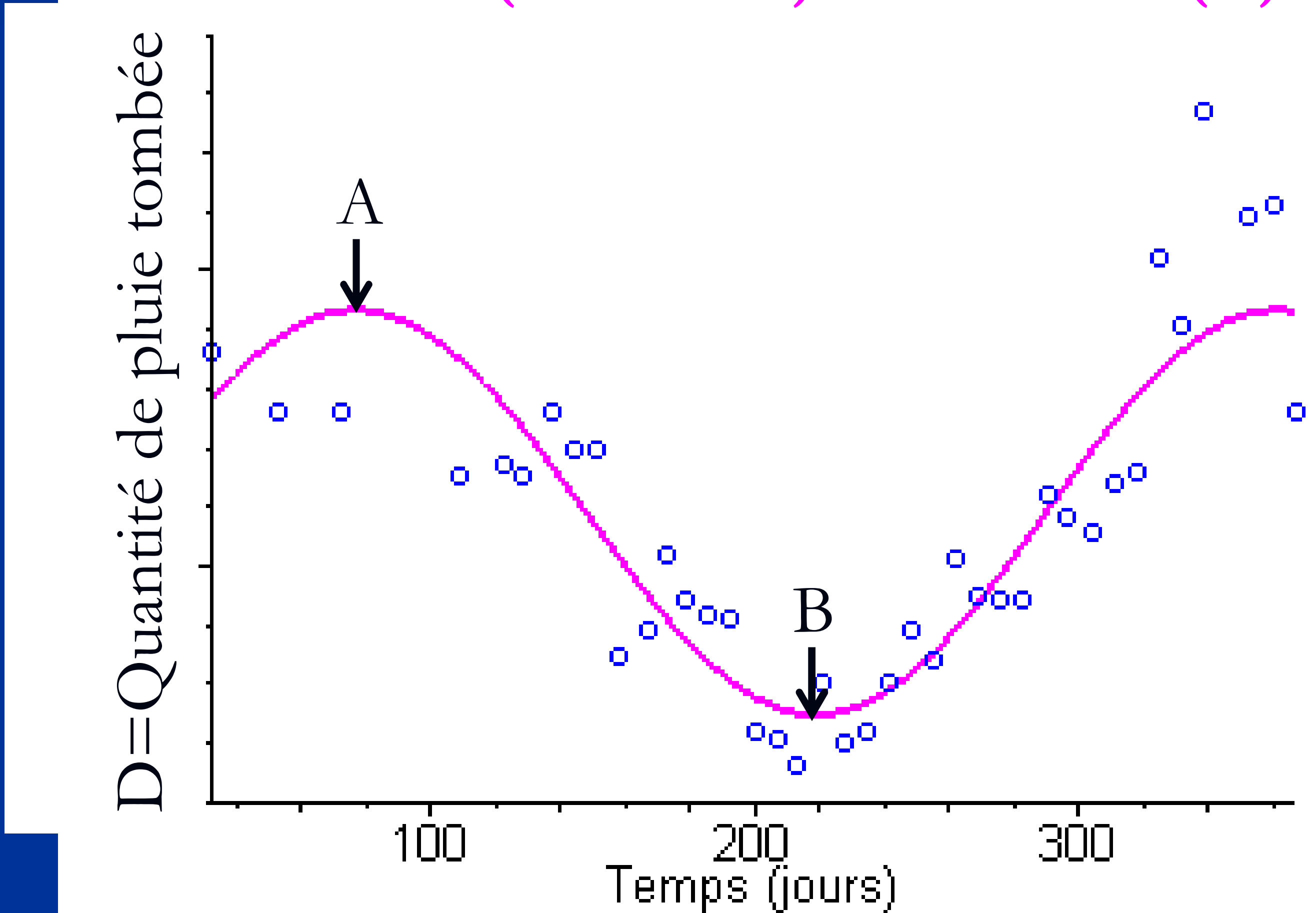
A: premier maximum

$\varpi t_{max1} + \varphi = 0$ => $t_{max1} = -\varphi / \varpi$

$D_{max} = \beta + \alpha$

Fonctions trigonométriques

$$D = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta = f(t)$$



A: premier maximum

$\varpi t_{max1} + \varphi = 0 \Rightarrow t_{max1} = -\varphi / \varpi$

$D_{max} = \beta + \alpha$

B: premier minimum

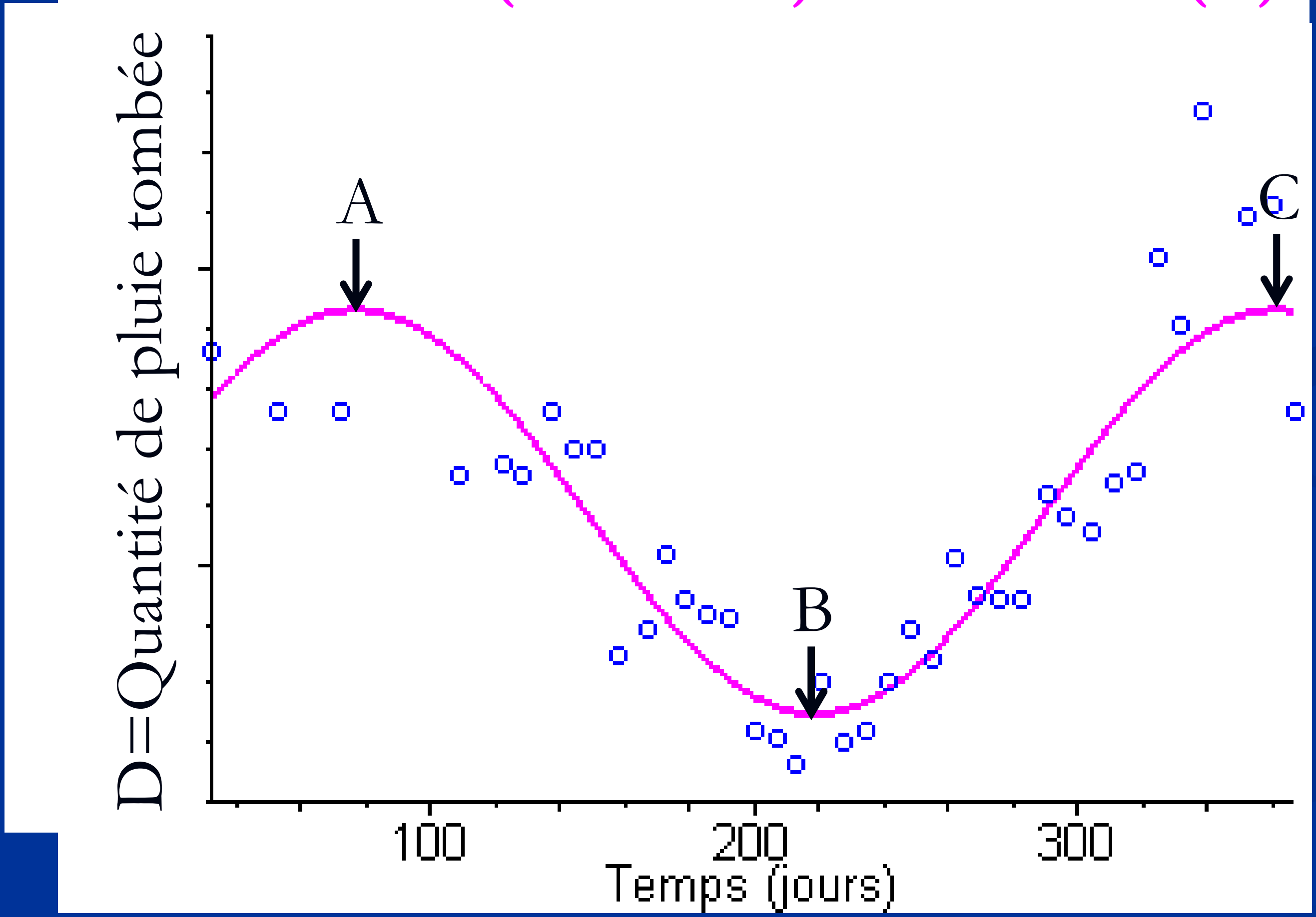
$D_{min} = \beta - \alpha$

$\Rightarrow \beta = (D_{max} + D_{min})/2$

Et $\alpha = (D_{max} - D_{min})/2$

Fonctions trigonométriques

$$D = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta = f(t)$$



A: premier maximum

$\varpi t_{max1} + \varphi = 0 \Rightarrow t_{max1} = -\varphi / \varpi$

$D_{max} = \beta + \alpha$

B: premier minimum

$D_{min} = \beta - \alpha$

$\Rightarrow \beta = (D_{max} + D_{min})/2$

Et $\alpha = (D_{max} - D_{min})/2$

C: deuxième maximum

$\varpi t_{max2} + \varphi = 2\pi$

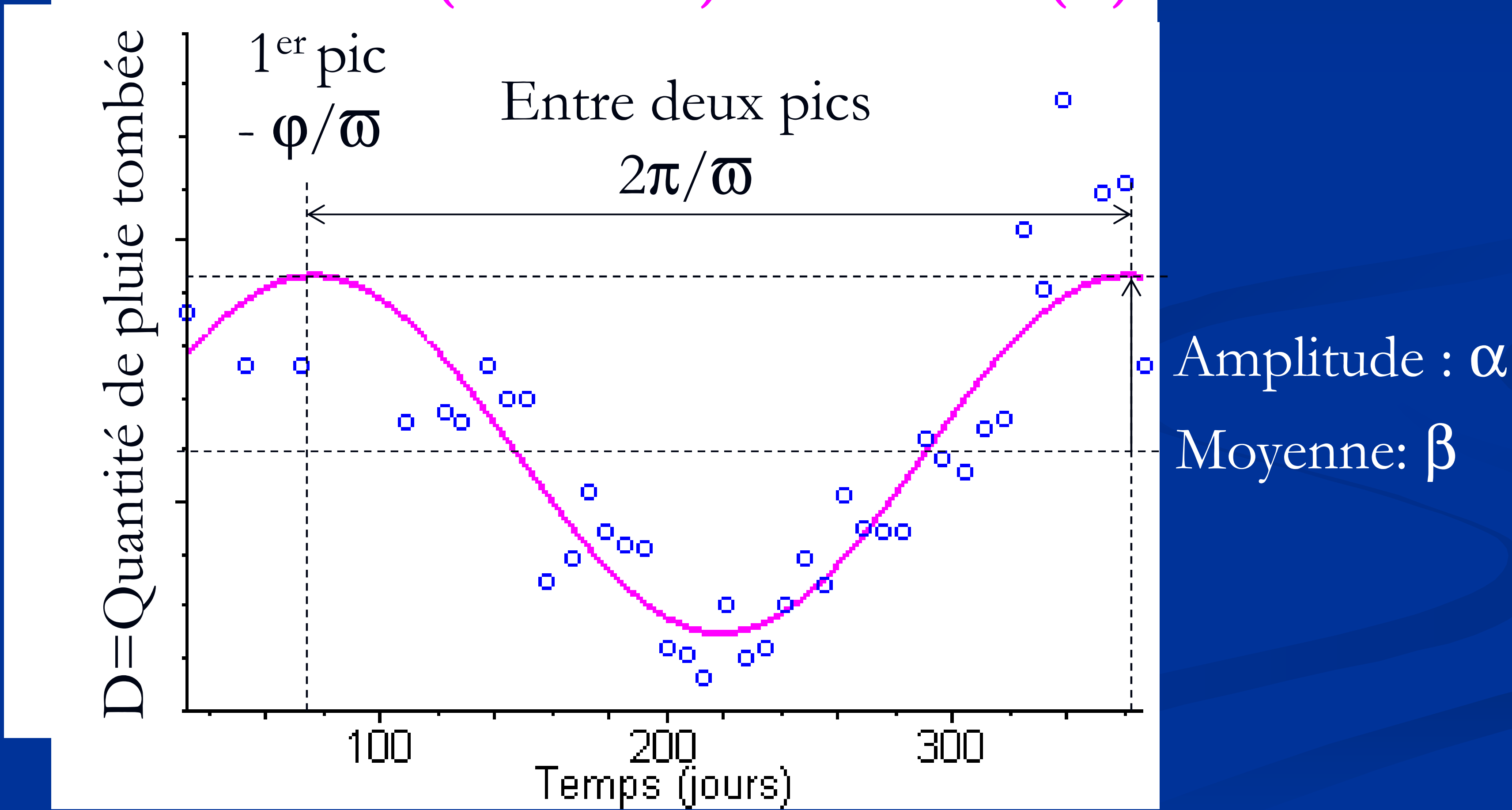
$\Rightarrow \varpi (t_{max2} - t_{max1}) = 2\pi$

$\Rightarrow \varpi = 2\pi / (t_{max2} - t_{max1})$

$\Rightarrow \varphi = -\varpi t_{max1}$

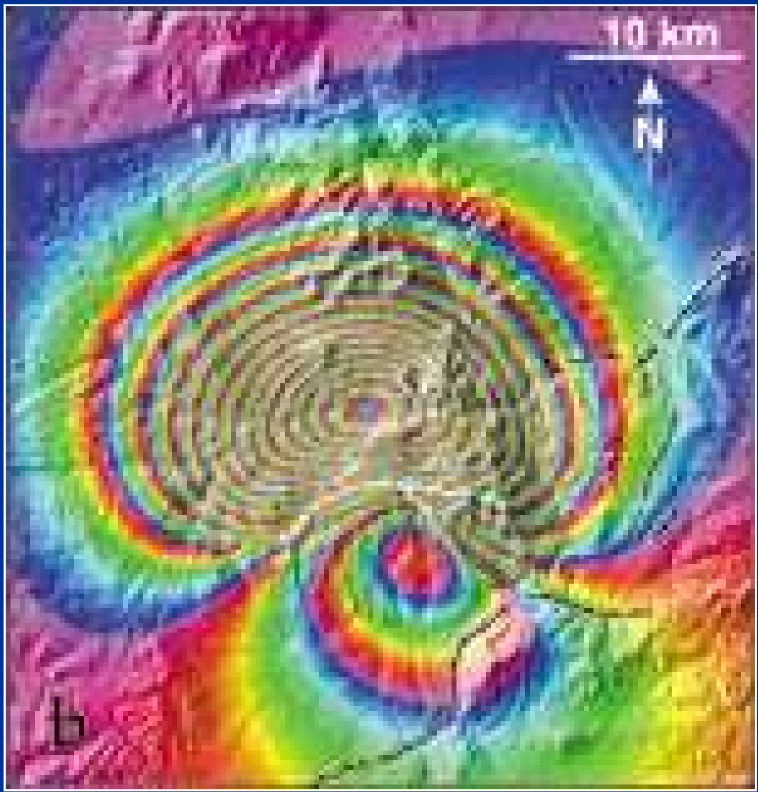
Fonctions trigonométriques

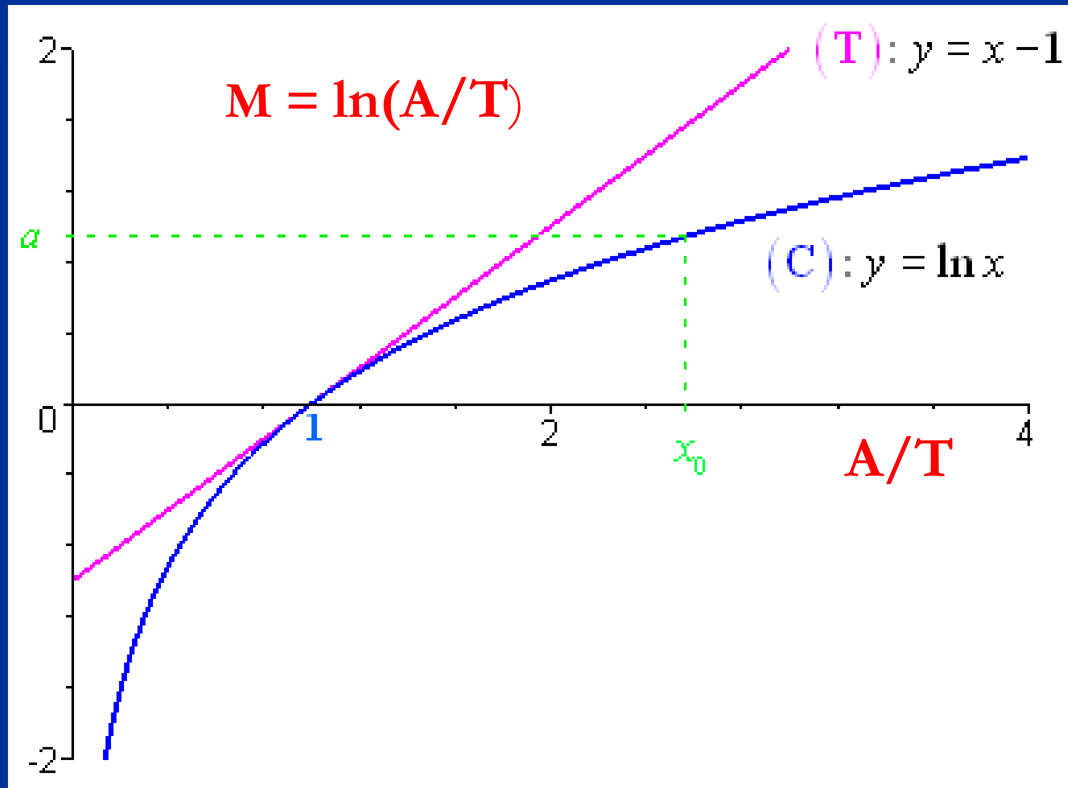
$$D = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta = f(t)$$



La fonction logarithme népérien

Mesurer la magnitude d'un tremblement de terre





Japon 1906 Chili 1960

A: amplitude des oscillations, T: période

La fonction logarithme népérien

Ensemble de définition: R_+^*

ln: $R_+^* \rightarrow R$

Valeurs particulières:

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$ (e = exponentielle(1) $\cong 2.71$)

Règles de calcul:

$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$ (si $a=1$: $\ln(1/b) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$)

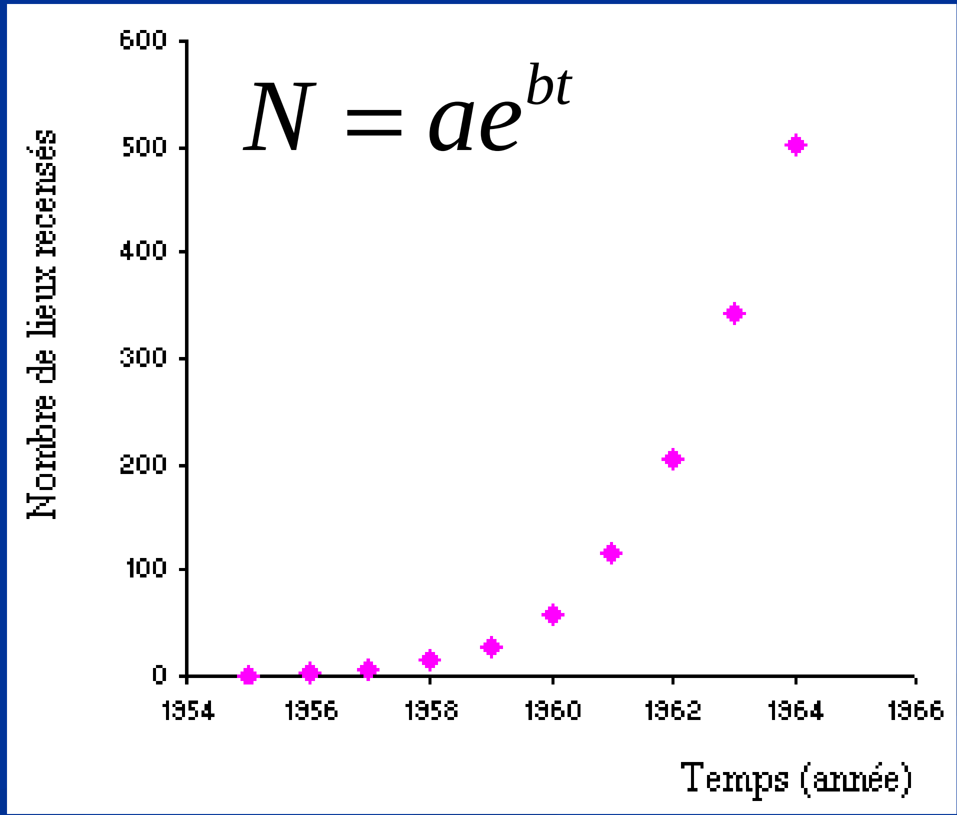
$\ln(a^b) = b \ln(a)$

$\ln(a+b) = \ldots$ Rien du tout, et **certainement pas** $\ln(a)+\ln(b)$!!!

La fonction exponentielle

Croissance d'une population de tourterelles

Au début du 20ème siècle, les populations de tourterelles turques ont *envahi* l'Europe d'Est en Ouest et arrivent en Grande Bretagne :1 lieu recensé en 1955… 501 en 1964



La fonction exponentielle

Ensemble de définition: R

exp: $R \rightarrow R_+^*$

Valeurs particulières:

exp(0) = 1

exp(1) = e

Règles de calcul:

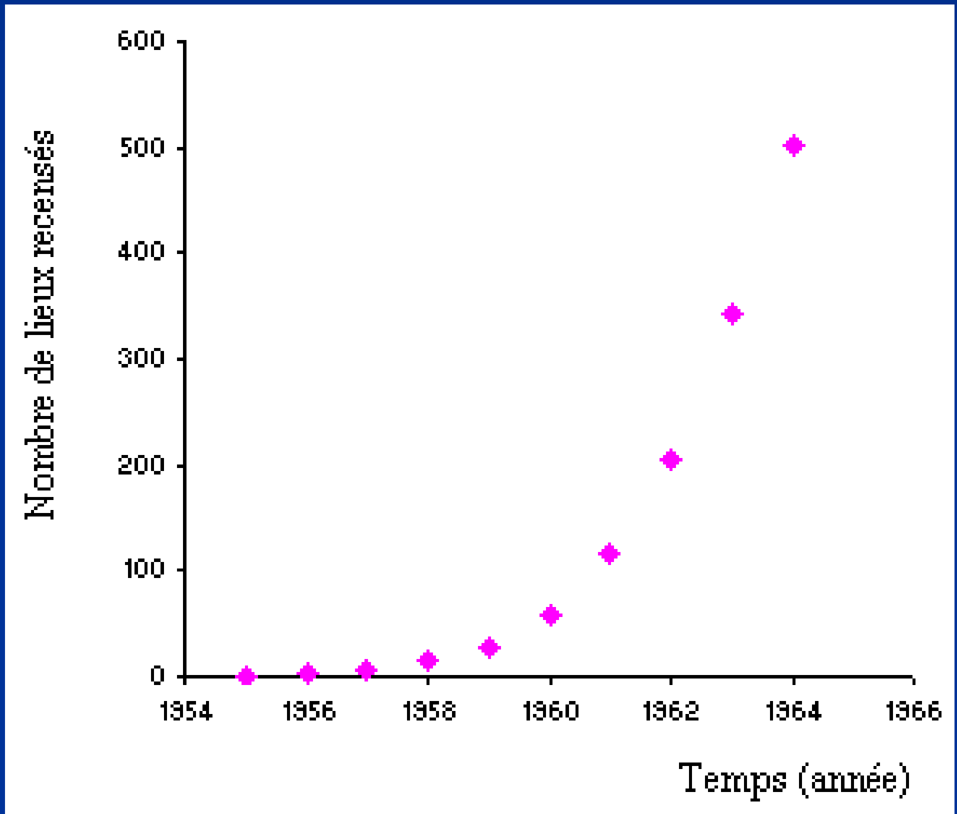
exp(a+b) = exp(a) * exp(b)

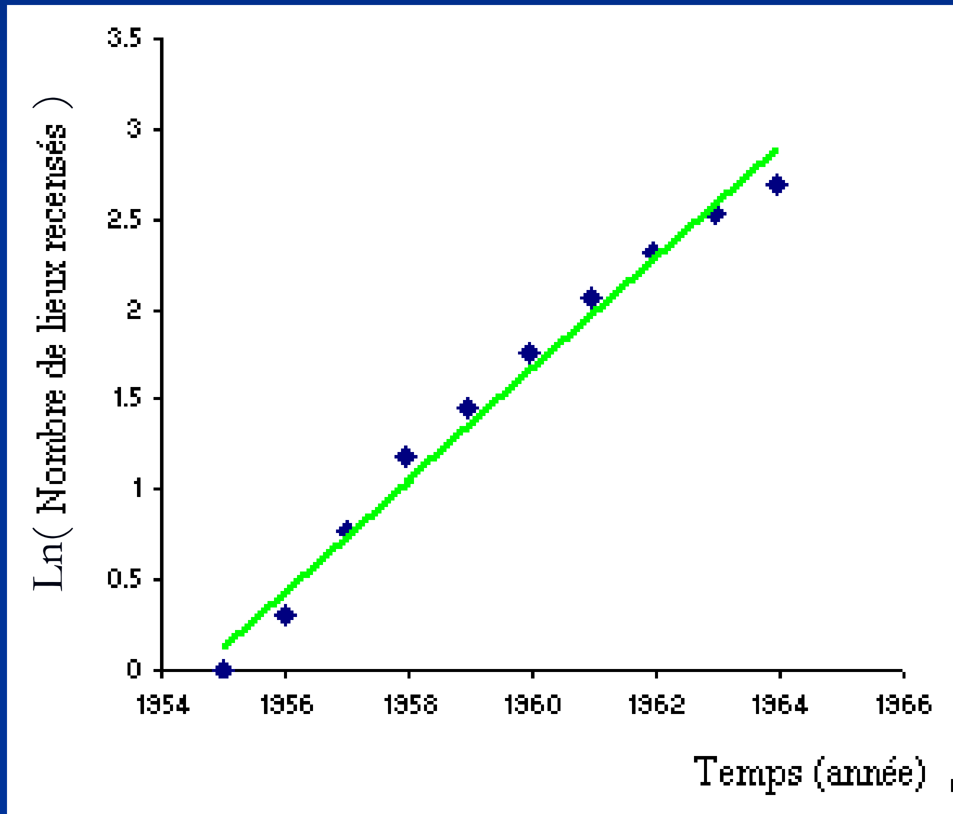
exp(a-b) = exp(a) / exp(b) (si a=0: exp(-b) = exp(0) / exp(b) = 1/exp(b))

exp(ab) = $\exp(a)^b = \exp(b)^a$

exp(a)+exp(b) = … Rien du tout, et **certainement pas** exp(ab)!!!

ln(fonction exponentielle) = droite





$$N = ae^{bt}$$

$$\ln N = \ln a + bt$$

La fonction puissance

$$a^b = \overbrace{a * a * a * \ldots * a}^{\text{b fois}}$$

Formules de base:

$a^{b+c}=a^b * a^c$

$(a^b)^c=a^{bc}$

Très simples à retrouver à la main…

Conséquences:

$a^{-b}a^b=1 \Leftrightarrow a^{-b}=1/a^b$

$(a^{1/b})^b=a^{(1/b) * b}=a^1 = a \Rightarrow$ Si b entier, $a^{1/b}$ est le nombre qui, mis à la puissance b, vaut a

$\Rightarrow \; a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$

La fonction puissance

$$a^b = \overbrace{a * a * a * \ldots * a}^{\text{b fois}}$$

Formules de base:

$a^{b+c}=a^b * a^c$

$(a^b)^c=a^{bc}$

Très simples à retrouver à la main…

Conséquences:

$a^{-b}a^b=1 \Leftrightarrow a^{-b}=1/a^b$

$(a^{1/b})^b=a^{(1/b)*b}=a^1 = a \Rightarrow$ Si b entier, $a^{1/b}$ est le nombre qui, mis à la puissance b, vaut a

$$\Rightarrow \; a^{1/b} = \sqrt[b]{a}$$

<u>Exercice:</u>

Simplifier les expressions suivantes:

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}$$

$$g(x) = (x * \sqrt{x})^3$$

Puissances et exponentielles

La fonction exponentielle est un cas particulier de fonction puissance:
$\exp(x) = e^x$, avec e défini par $\ln(e) = 1$

Réciproquement, toute puissance peut s'écrire comme une exponentielle:
$\ln(a^b)=b\ln(a)$
$\Leftrightarrow a^b = \exp\{\ln(a^b)\} = e^{b\ln(a)}$

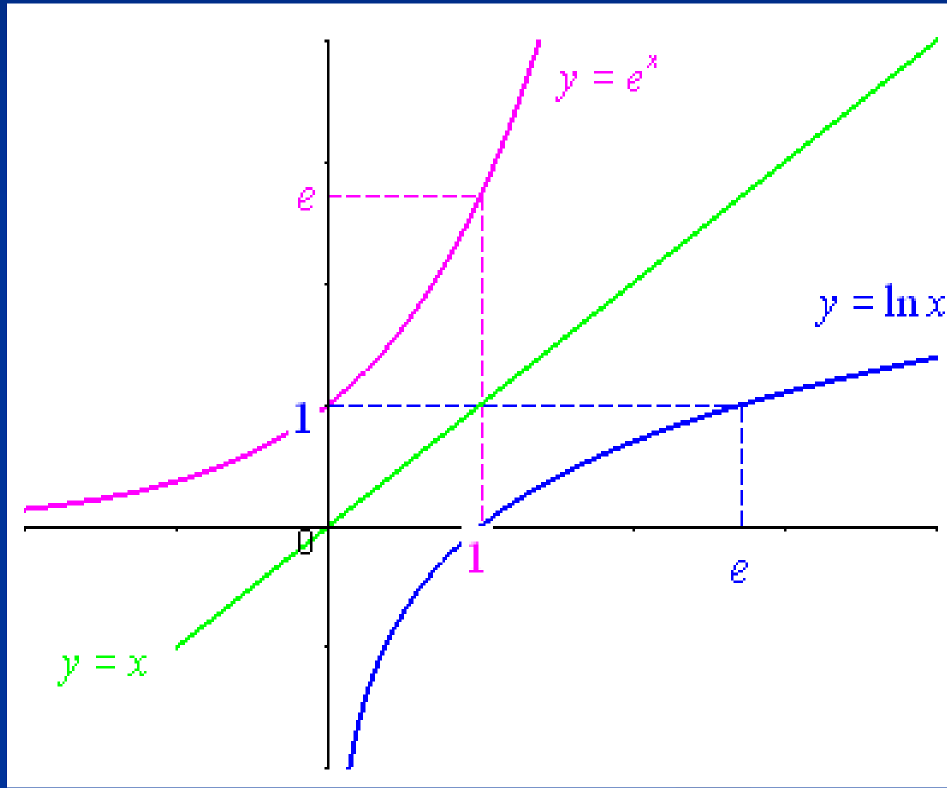
Fonction réciproque

exp et ln sont deux fonctions réciproques l'une de l'autre car exp(ln(x)) = x

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$Df \rightarrow f(Df)$$
$$x \rightarrow y = f(x) = e^x$$

$$f(Df) \rightarrow Df$$
$$y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \ln y$$



Graphiquement, deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre
⇔ Leurs courbes représentatives sont symétriques par rapport à la première bissectrice (droite y=x)

Fonction composée

Exemple:

$$f \text{ définie par } f(x) = \sqrt{x} \text{ avec } D_f = \mathbb{R}^+$$

$$g \text{ définie par } g(x) = \frac{1+x}{1-x} \text{ avec } D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

La fonction composée gof est obtenue en remplaçant x par f(x) dans la formule de g:

$$fog(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

On a D(gof) = $R^+ \setminus \{1\}$

<u>Remarques:</u>

1) gof(x) peut également être noté g(f(x))
2) f et g sont des fonctions mutuellement réciproques

$\Leftrightarrow$ fog(x) = gof(x) = x (quelque soit x)

Plan d'étude d'une fonction

A. D_f

B. Symétrie

C. Continuité-limites

D. Asymptotes

E. Sens de variation

$$f'(x)$$

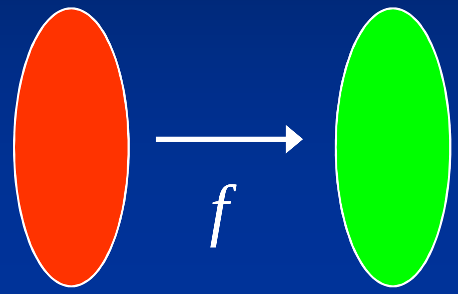
F. Concavité/convexité

$$f''(x)$$

G. Tableau de variation

H. Graphe

A. Domaine de définition



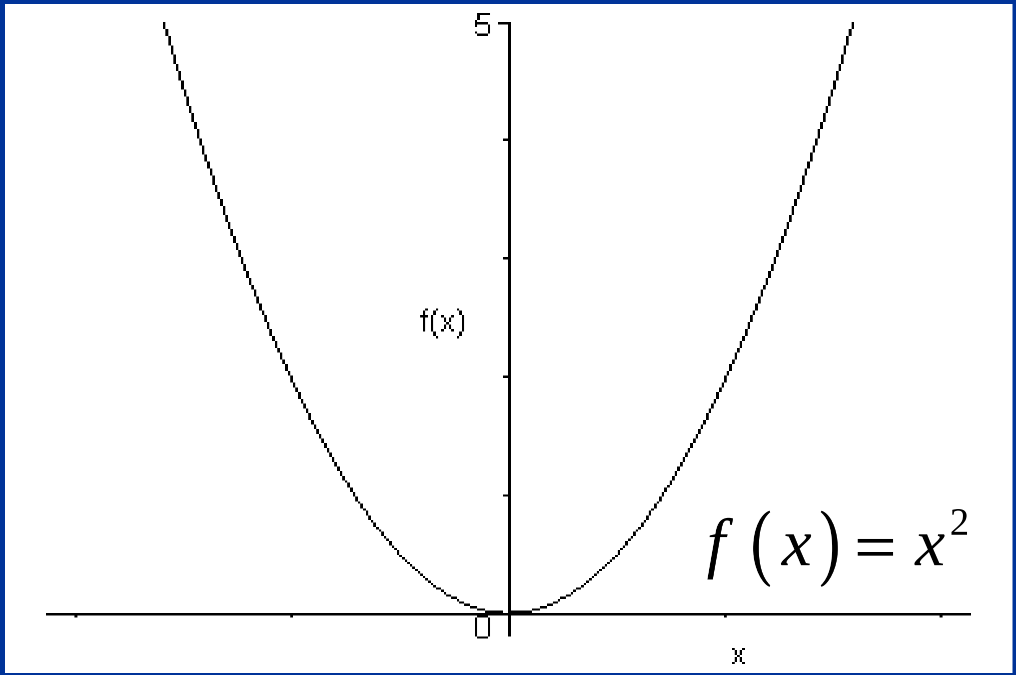
- D_f = *Domaine de définition*
  Ensemble de départ (ensemble des antécédents) = l'ensemble des x

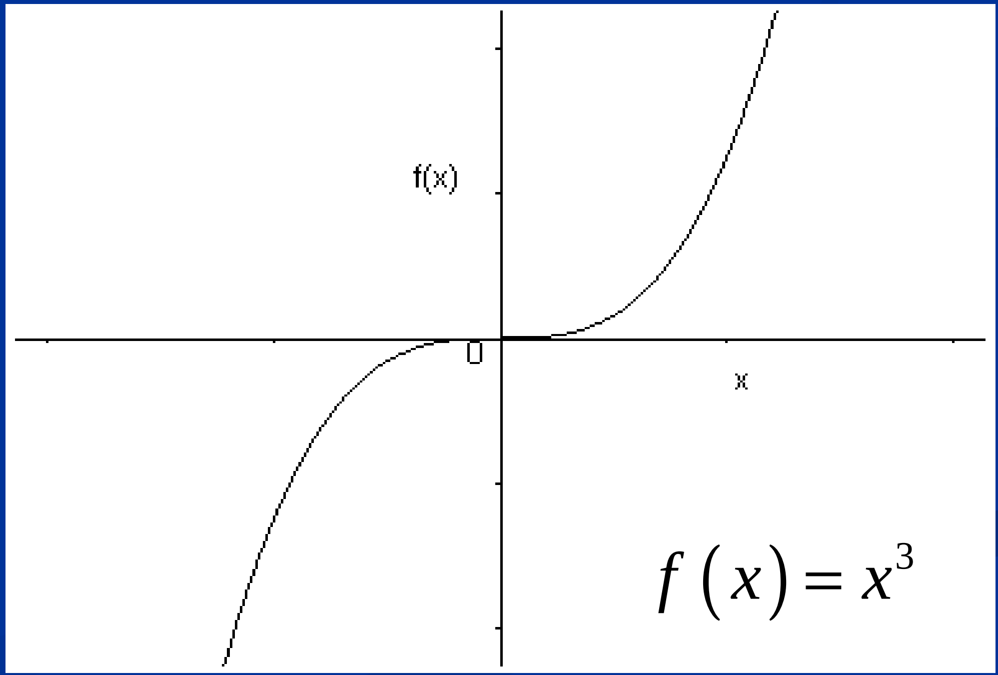
- $f(D_f)$ = Ensemble d'arrivée (ou ensemble des images) = l'ensemble des y

B. Symétrie : paire ou impaire ?

Fonction paire
$f(x) = f(-x)$

Fonction impaire
$f(-x) = -f(x)$





C. Continuité - Limite

Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la ***limite*** *de toutes les autres.*

Cauchy, 1821

Opérations sur les limites

Limite d'une somme

Le tableau ci-dessous donne la limite de la somme de f(x) et g(x) (c'est-à-dire $\lim_{x \to a} f(x) + g(x)$)

Quand x tend vers a, a pouvant être un réel (fini) ou + ou – l'infini

$\lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} g(x)$

	0	**l**	**-∞**	**+∞**
0	0	l	-∞	+∞
l'	l'	l+l'	-∞	+∞
-∞	-∞	-∞	-∞	?
+∞	+∞	+∞	?	+∞

Opérations sur les limites

Limite d'une différence

Le tableau ci-dessous donne la limite de la différence de f(x) et g(x) (c'est-à-dire $\lim_{x \to a} f(x) - g(x)$)

Quand x tend vers a, a pouvant être un réel (fini) ou + ou – l'infini

$\lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} g(x)$

	0	**1**	**-∞**	**+∞**
0	0	1	-∞	+∞
l'	-l'	1-l'	-∞	+∞
-∞	+∞	+∞	?	+∞
+∞	-∞	-∞	-∞	?

Opérations sur les limites

Limite d'un produit

Le tableau ci-dessous donne la limite du produit de f(x) et g(x) (c'est-à-dire $\lim_{x \to a} f(x) * g(x)$)

Quand x tend vers a, a pouvant être un réel (fini) ou + ou – l'infini

$\lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} g(x)$

	0	**1**	**-∞**	**+∞**
0	0	0	?	?
l'	0	l*l'	(+/-) ∞	(+/-) ∞
-∞	?	(+/-) ∞	+∞	-∞
+∞	?	(+/-) ∞	-∞	+∞

(+/-) ∞: sera + ∞ ou –∞ en accord avec les règles de calcul classiques:
+*+, +/+, -*-, -/- = + et +*-, +/-, -*+, -/+ = -

Opérations sur les limites

Limite d'un quotient

Le tableau ci-dessous donne la limite du quotient de f(x) et g(x) (c'est-à-dire $\lim_{x \to a} f(x)/g(x)$)

Quand x tend vers a, a pouvant être un réel (fini) ou + ou – l'infini

$\lim_{x \to a} f(x)$

$\lim_{x \to a} g(x)$

	0	**1**	**-∞**	**+∞**
0	?	(+/-) ∞	(+/-) ∞	(+/-) ∞
l'	0	1/l'	(+/-) ∞	(+/-) ∞
-∞	0	0	?	?
+∞	0	0	?	?

Opérations sur les limites: bilan

Règles intuitives de base:

$$\infty * \infty = \infty$$

$$\frac{\infty}{non\ infini} = \infty$$

$$\frac{non\ infini}{\infty} = 0$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty\ (+ \text{ ou } - \text{ ou } * \text{ ou } /) \text{ fini} = \infty$$

$$\frac{0}{non\ nul} = 0$$

Opérations sur les limites: bilan

Formes indéterminées:

$\infty - \infty$ $0 \times \infty$ $0 / 0$ ∞ / ∞ 1^{∞}

(fini non-nul ou infini)/ 0:

Positif / $0^{+} \rightarrow +\infty$ Positif / $0^{-} \rightarrow -\infty$

Négatif / $0^{+} \rightarrow -\infty$ Négatif / $0^{-} \rightarrow +\infty$

Forme indéterminée si le terme du bas oscille indéfiniment autour de 0

(comme par exemple sin(x)/x en $+\infty$)

Formes indéterminées: quelques méthodes

*Fonctions du type polynome * exponentielle:*

fonctions du type P(x)*exp(Q(x)) en + ou - ∞, avec Q(x)→-∞

Dans ce cas l'exponentielle est dominante, c'est-à-dire que la fonction tend vers 0

Exemple:

$$f(x) = (x^3 + 2x + 12)\exp\{-x^2\}$$

Formes indéterminées: quelques méthodes

Fonctions du type $x^a ln(x)$:

Dans ce cas c'est le terme en x^a qui l'emporte:

$$\lim_{x \to 0} x^a \ln(x) = 0 \text{ si a} > 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^a \ln(x) = 0 \text{ si a} < 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{\ln(x)} = +\infty \text{ si a} > 0$$

Formes indéterminées: quelques méthodes

Quantité conjuguée:

fonctions impliquant des termes type:

a - b

Où a et/ou b sont des racines carrées

On multiplie alors en haut et en bas par a + b

Exemple:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Formes indéterminées: quelques méthodes

Factorisation par le terme dominant:

Fonctions du type a/b où a et b tendent vers une même limite infinie ou nulle

Exemple: (quand x tend vers +∞)

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 8}{\sqrt{x^2+3} + 2x}$$

$$f(x) = \frac{e^{-2x} + e^{-x}}{e^{-x} + 1/x}$$

Déterminer une limite par encadrement

3 théorèmes:

1) Gendarmes: si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et g et h tendent vers une limite finie l, alors f tend vers la même limite finie l

2) Si $f(x) \geq g(x)$ et g tend vers $+\infty$, alors f tend aussi vers $+\infty$

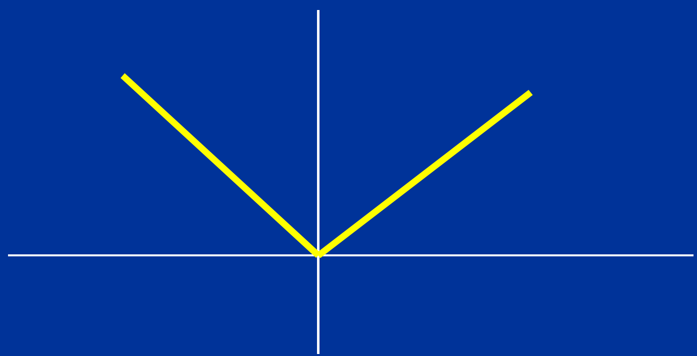
3) Si $f(x) \leq g(x)$ et g tend vers $-\infty$, alors f tend aussi vers $-\infty$

Exemple:

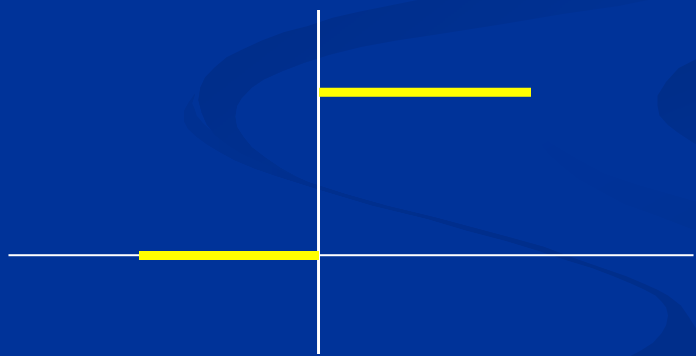
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

C. Continuité - Limite

Une fonction est continue en un point x_0
si la limite en ce point existe :



Continue en (0,0)

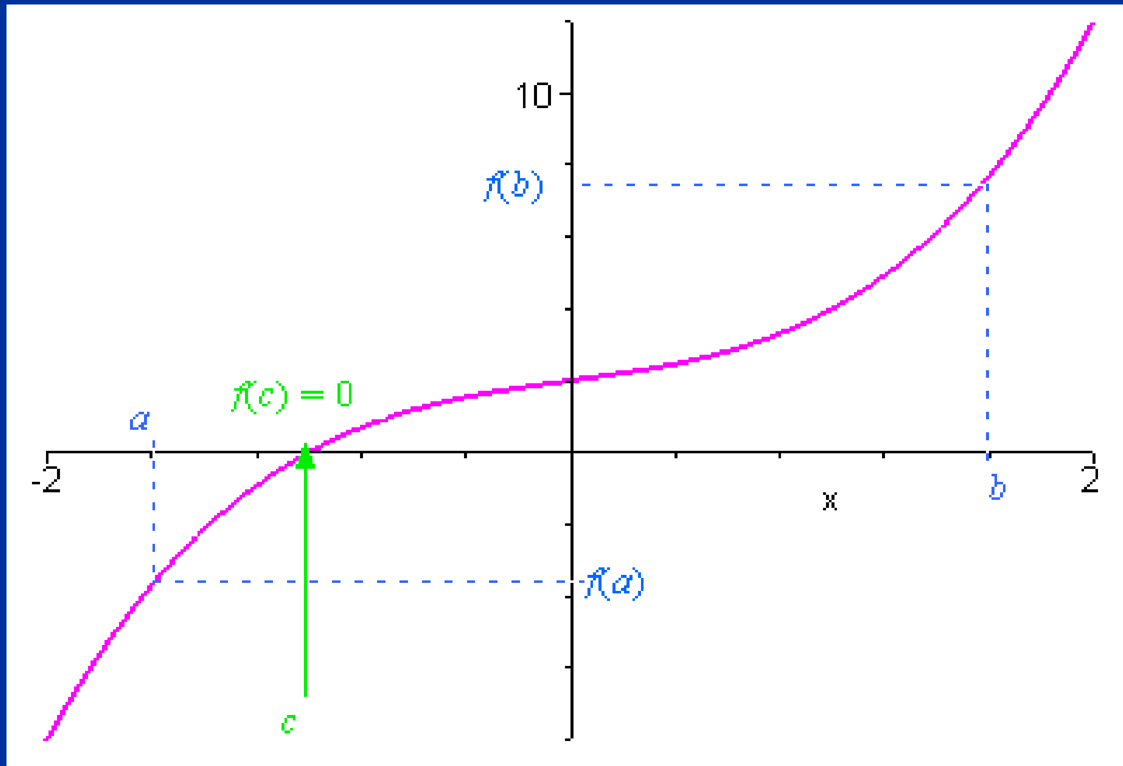


Pas continue en (0,0)

Théorème des valeurs intermédiaires

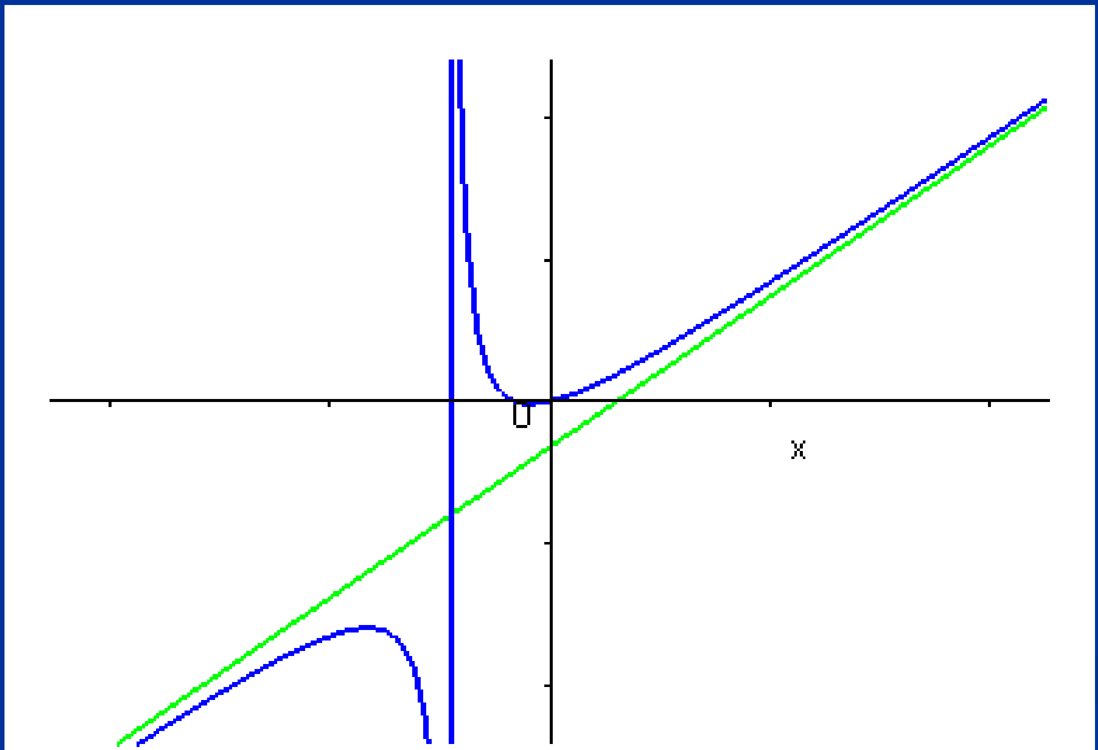
Soit *f* continue sur [a;b]

$$f(a)\,f(b)\leq 0 \Rightarrow \exists c\in \left]a,b\right[\;/\; f(c)=0$$



D. Asymptotes

Si la courbe de *f* s'approche infiniment près d'une droite, celle-ci s'appelle une asymptote



Asymptote verticale

Asymptote oblique

Asymptotes

- Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
  il y a une asymptote verticale d'équation $x = x_0$

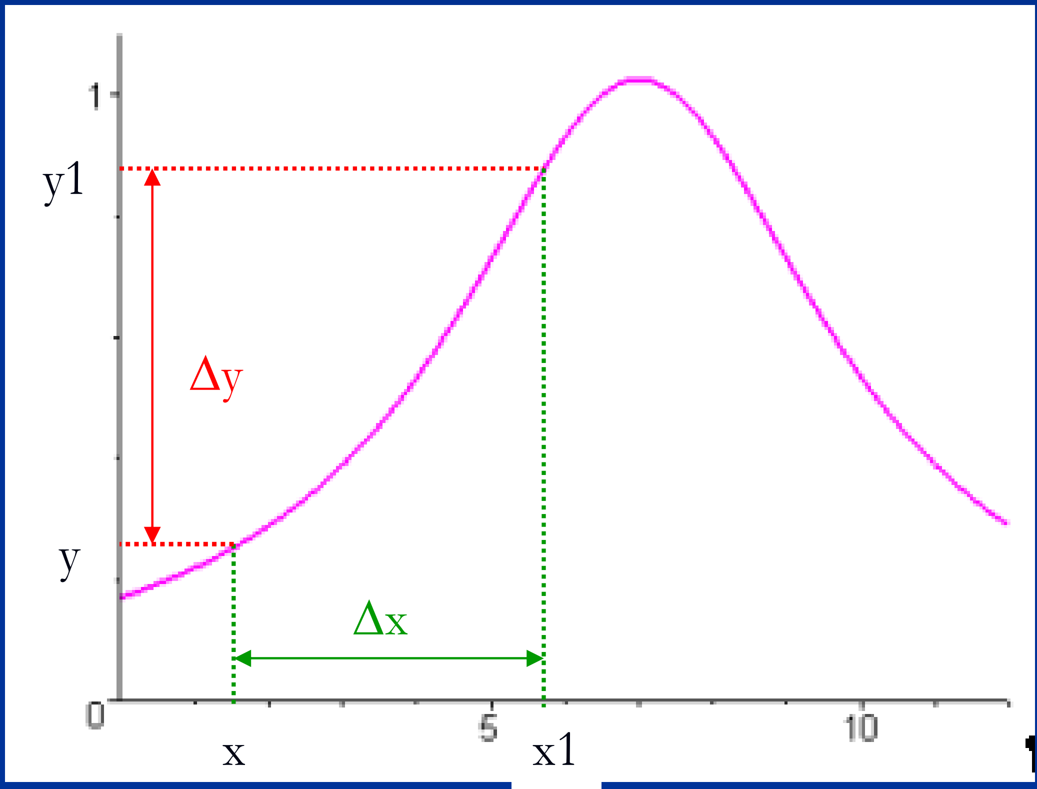
- Si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
  il y a une asymptote horizontale d'équation $y = l$

- Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$
  il y a une asymptote oblique d'équation $y = ax+b$

  si $a = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ $\quad b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$

E. Dérivées

Notion d'accroissement



$$\Delta x = x_1 - x \Leftrightarrow x_1 = x + \Delta x$$

$$\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

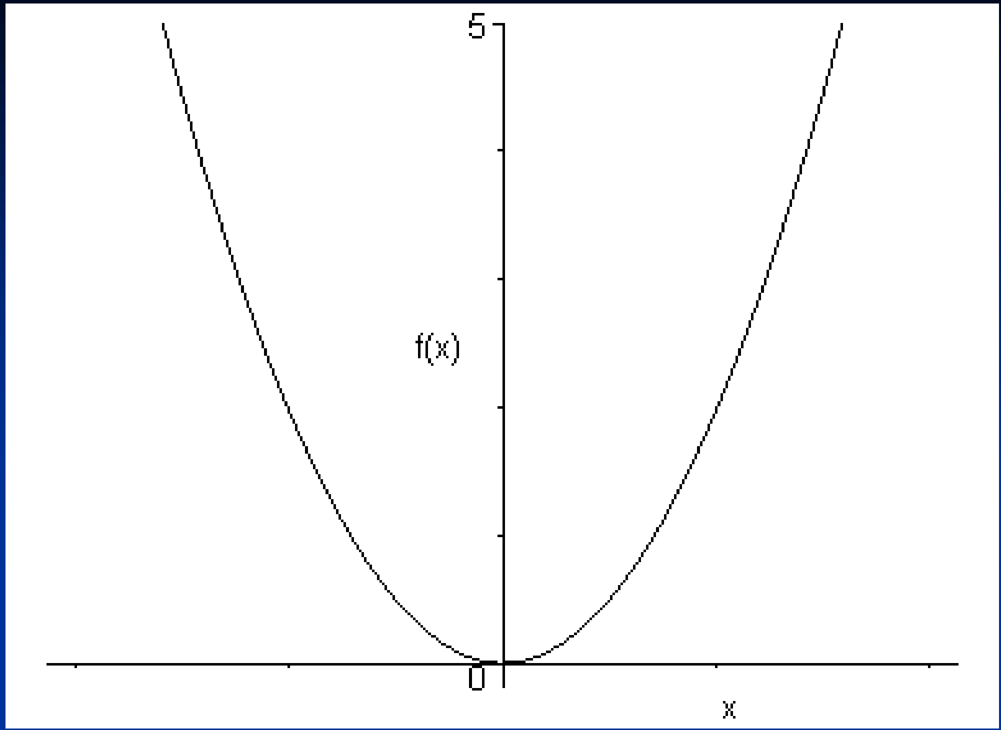
Notion de dérivée

Fonction dérivée

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Dérivée en un point x_0

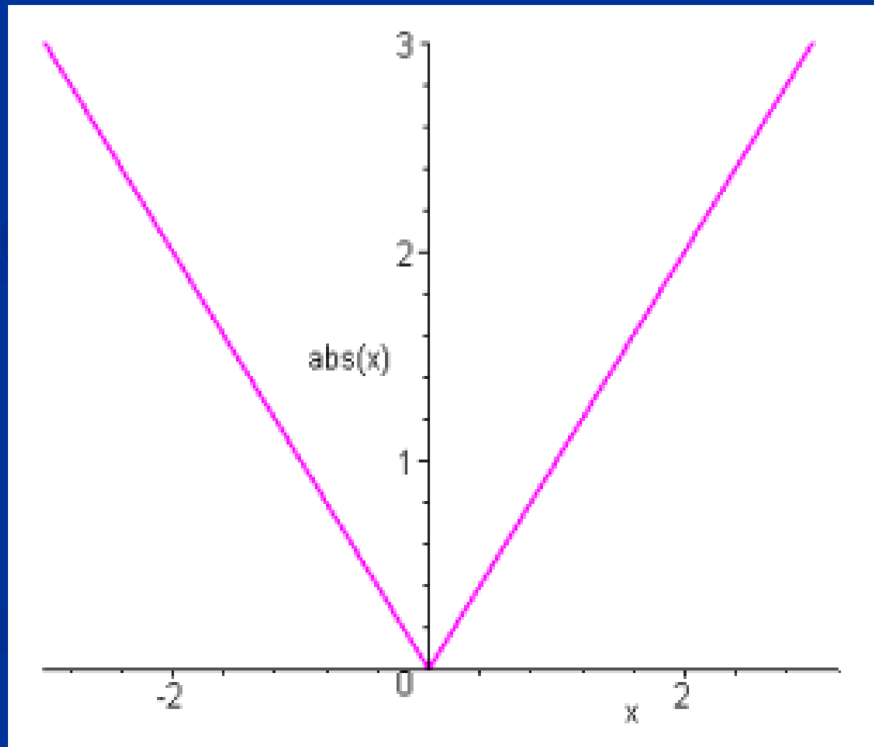
$$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$



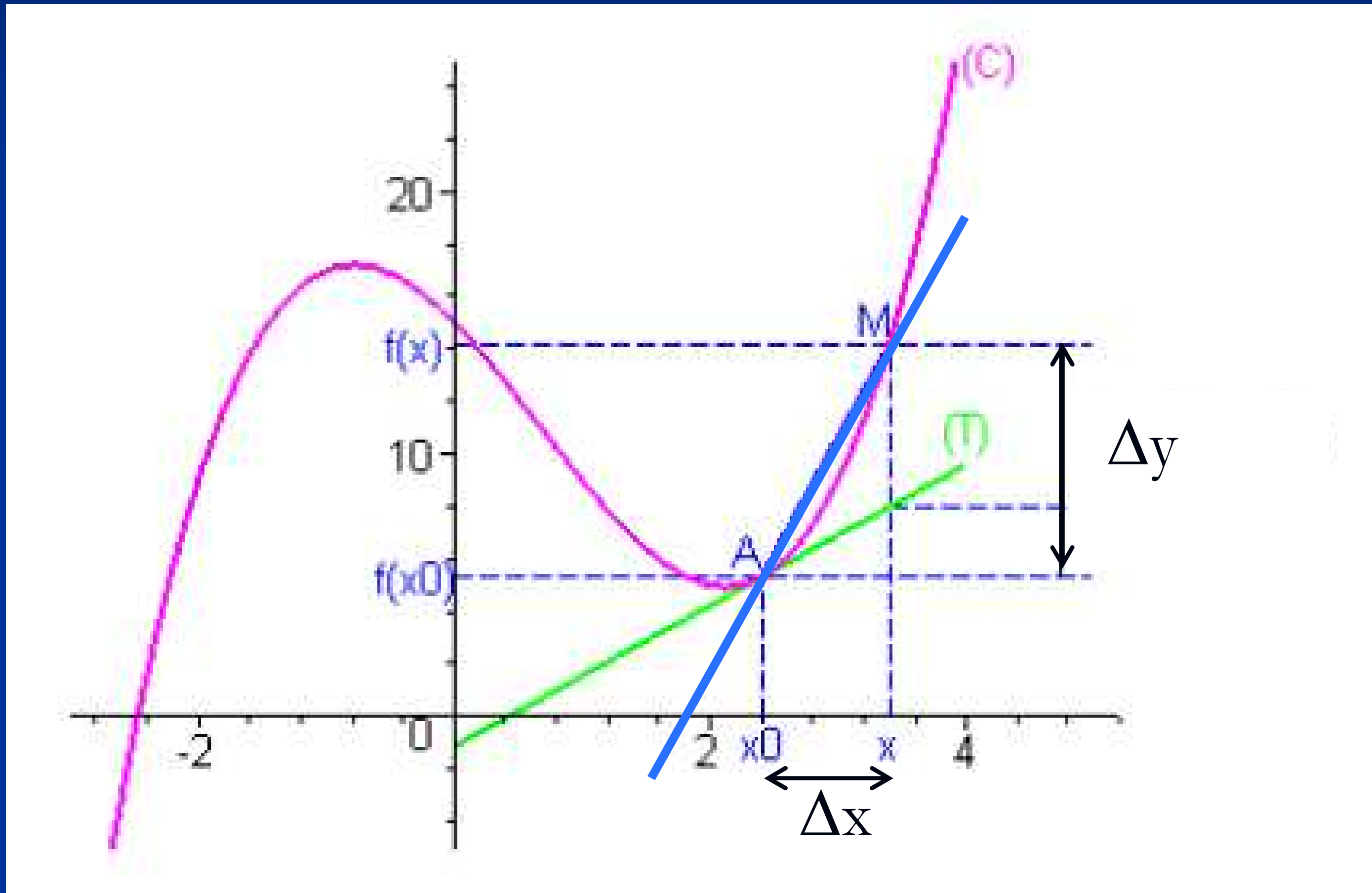
$$\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=x+x_0\xrightarrow[x\to x_0]{}2x_0=f'(x_0)$$

Dérivable en tout point

Non dérivable en 0



Interprétation géométrique



$$(\mathrm{T}) : y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Dérivées des fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées
a	0
ax+b	a
sin(x)	cos(x)
cos(x)	-sin(x)
tg(x)	$1+\text{tg}^2(x)$
arcsin(x)	$1/\sqrt{1-x^2}$
arccos(x)	$-1/\sqrt{1-x^2}$
arctg(x)	$1/(1+x^2)$

Dérivées des fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées
$1/x$	$-1/x^2$
x^n	nx^{n-1}
$\ln(x)$	$1/x$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$

Exo: dérivée de

x^3

2^x

$\sqrt[3]{x}$

Opérations sur les limites

Fonctions	Dérivées
U+V	U'+V'
UV	U'V+UV'
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'V-UV'}{V^2}$

Exo: dérivée de
$2x^2 + 3x + 4/x$
$(x+1) * \ln(x)$
$\mathrm{Exp}(x)/\sin(x)$

Opérations sur les limites

Dérivée d'une fonction composée:

$(gof)' = f' * (g' o f)$

Ou encore:

$(gof)'(x) = f'(x) * g'(f(x))$

Fonctions	Dérivées
$\ln(U)$	$\frac{U'}{U}$
e^U	$U'e^U$
U^n	$nU'U^{n-1}$

<u>Exo</u>: dérivée de

$Cos(3x)$

$Sin(x^2)$

$Exp(cos(x))$

$Ln(\sqrt{x})$

Retour sur les limites indéterminées

Utilisation de la formule de la dérivée:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

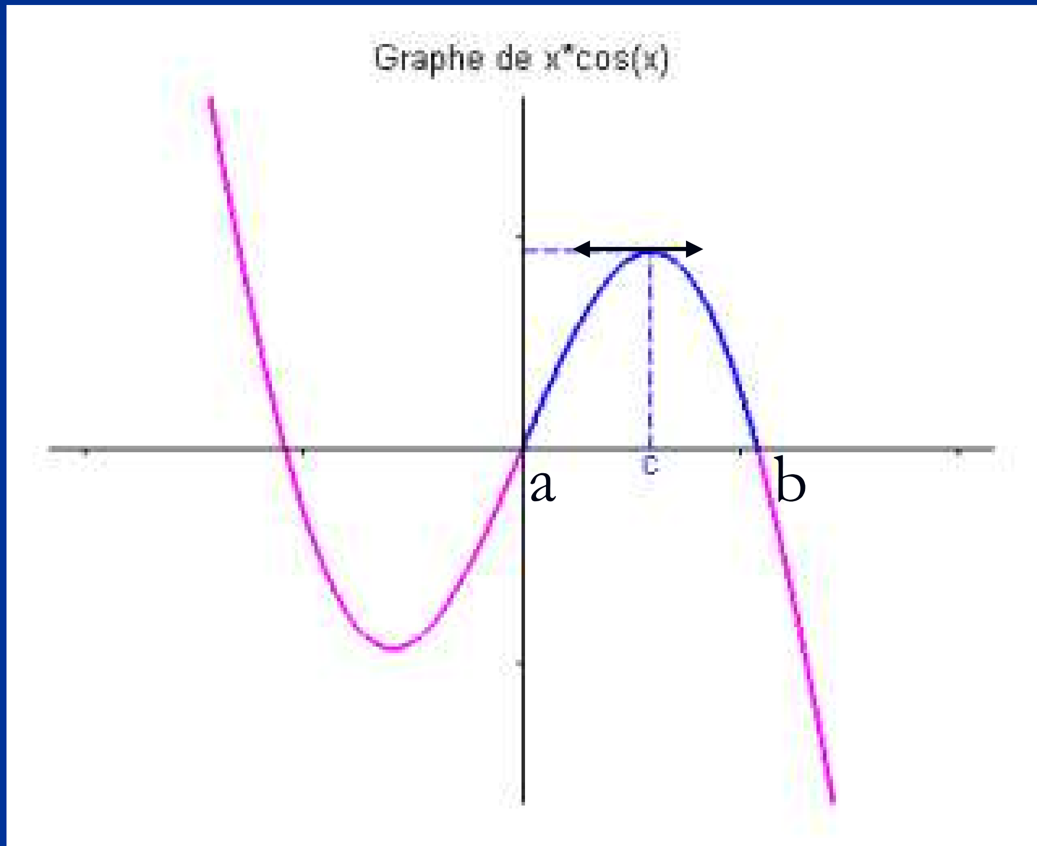
Utilisable dès qu'on a une fonction du type $\dfrac{f(x) - b}{x - a}$ avec x tend vers a et f(x) tend vers b

Exemple: formules appliquées en a=0 à f(x) = cos(x), sin(x), racine(1+x), exp(x), ln(1+x)

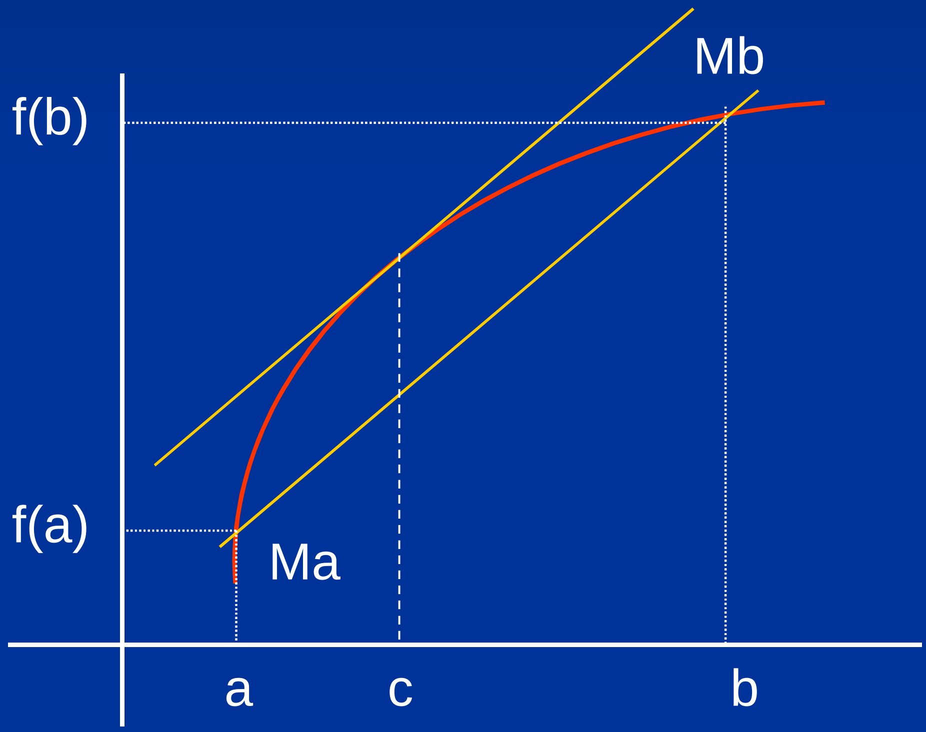
Marche aussi pour des limites du type $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{f(x) - b}{g(x) - c}$

Exemple: $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{e^x - e^4}$

Théorème de ROLLE



Théorème des accroissements finis



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

E. Dérivée: Sens de variation

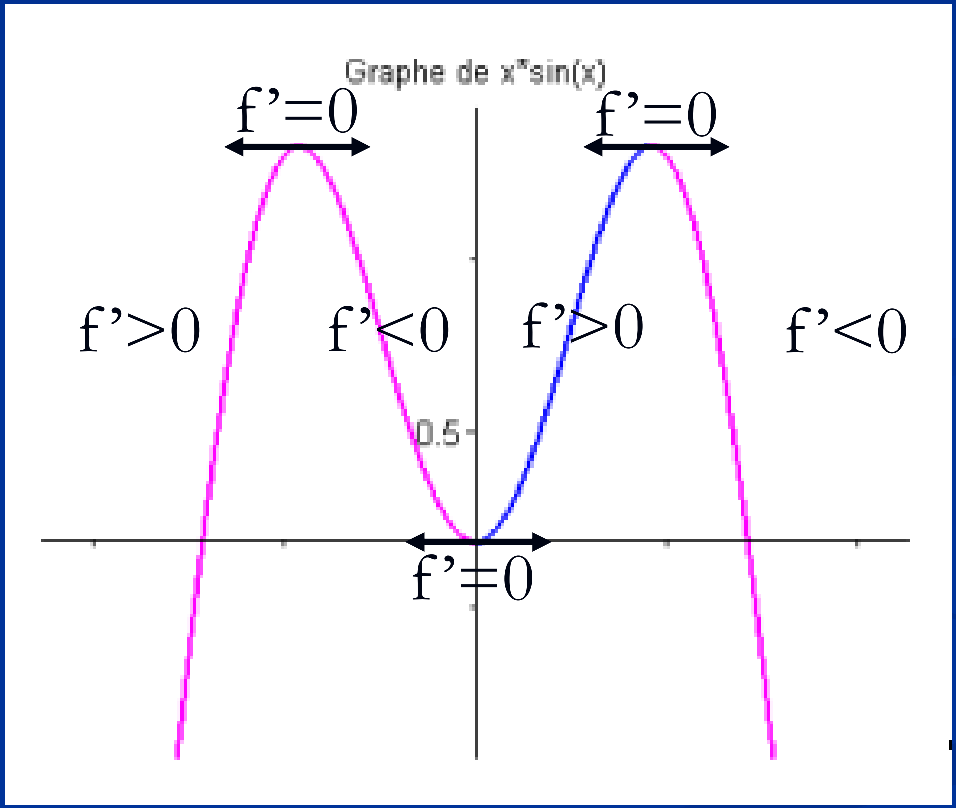
- f est constante sur [a,b]
  si la dérivée est nulle sur [a,b]

- f est croissante sur [a,b]
  si la dérivée est positive sur [a,b]

- f est décroissante sur [a,b]
  si la dérivée est négative sur [a,b]

- f admet un extremum en x
  si la dérivée s'annule en x

Sens de variation



Dérivée successives

f'(x), la dérivée de f(x), est une fonction qui peut elle-même être dérivée

f''(x) est la dérivée de f'(x)

$f^{(3)}(x)$ est la dérivée de f''(x)

.

.

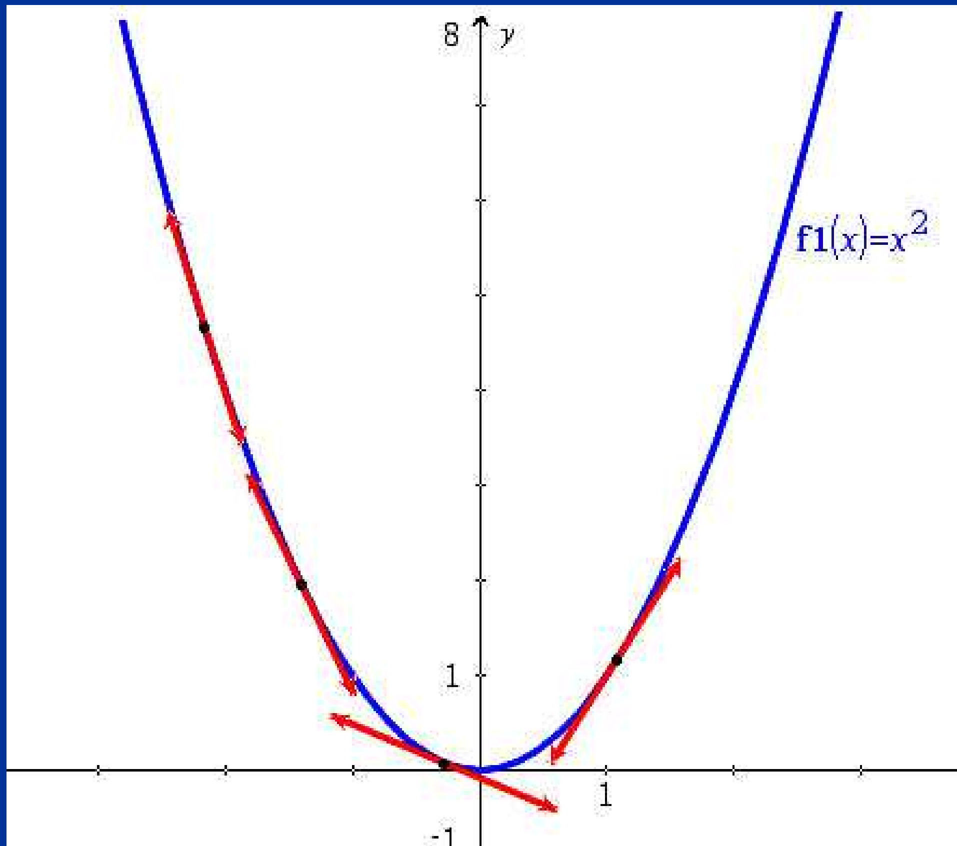
.

$f^{(k)}(x)$ est la dérivée de $f^{(k-1)}(x)$

Exo:
dérivée 3è de
$f(x)=x^4 + 1/x$

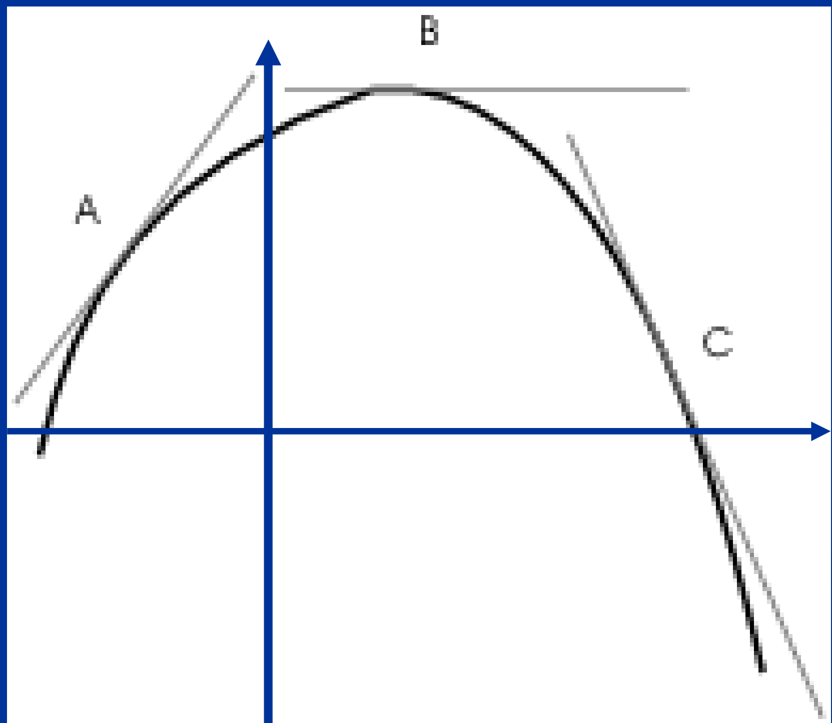
F. Dérivée: Convexité

f est conVexe sur un intervalle si sa dérivée seconde est positive (le graphe de f est courbé vers le haut)



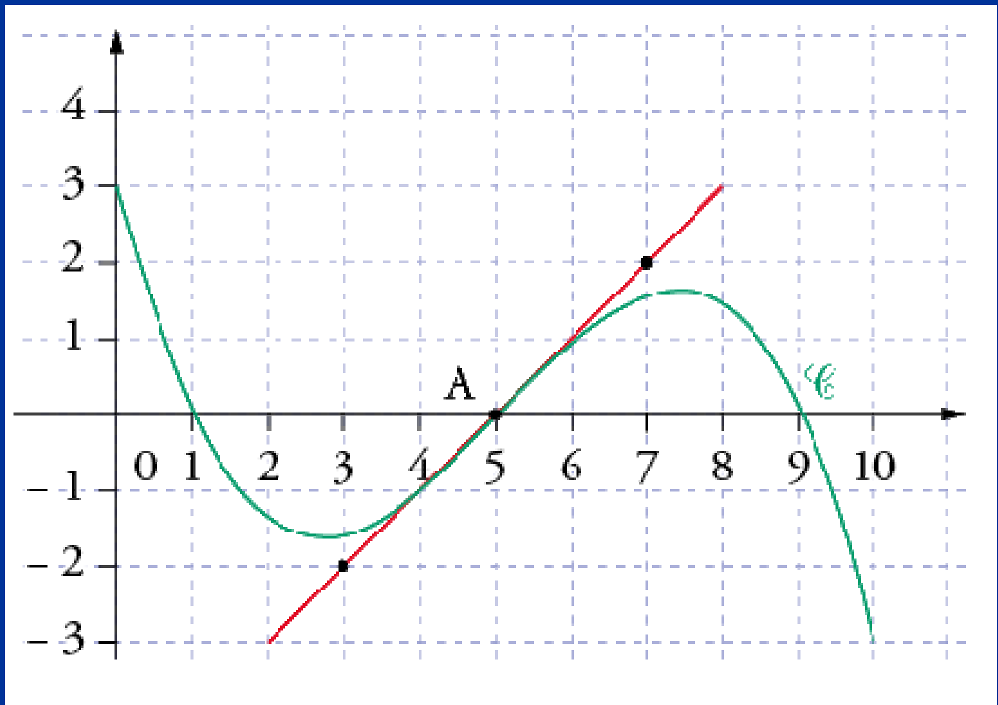
F. Dérivée: Concavité

f est concAve sur un intervalle si sa dérivée seconde est négative



F. Dérivée: Point d'inflexion

f a un point d'inflexion si la dérivée seconde s'annule ET change de signe en ce point.



La tangente traverse la courbe au point d'inflexion

G. Le tableau de variation

Construire le tableau à partir du signe de la dérivée.

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	1

Exercice: étudier la fonction $f(x) = x+(1/x)$