

Mathématiques

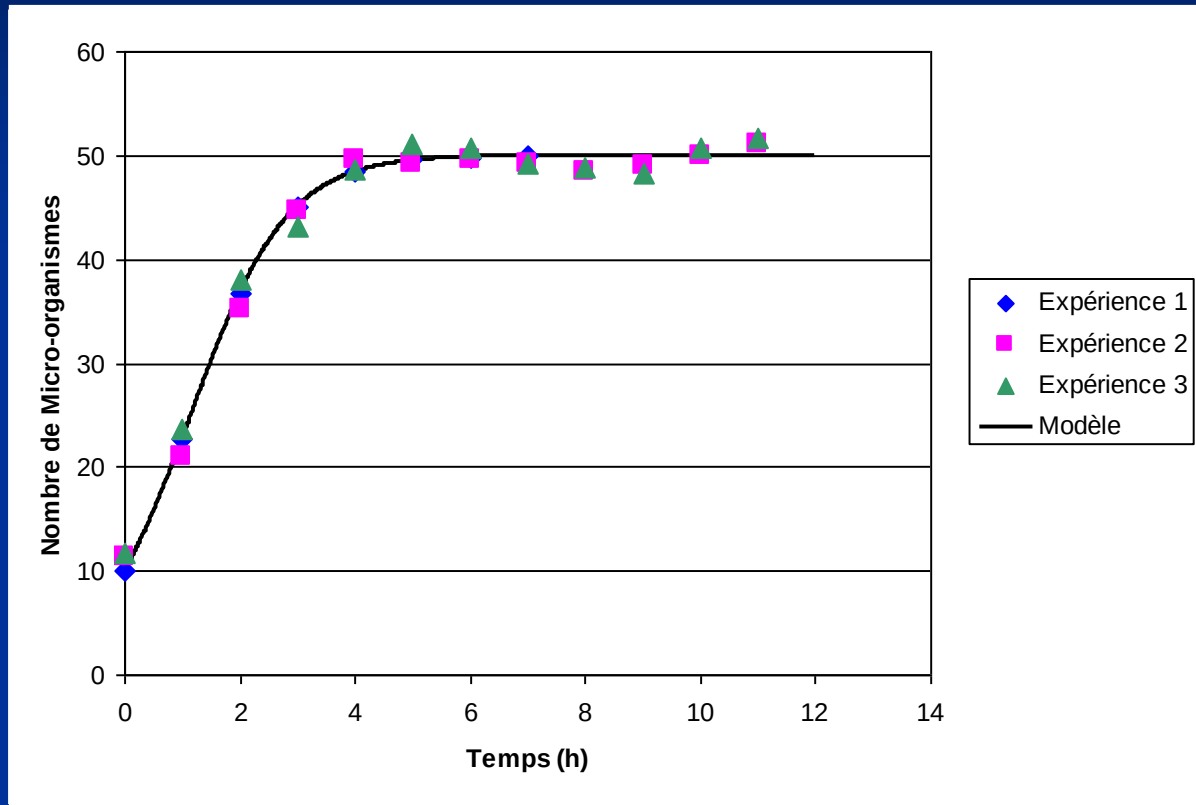
Dominique Allainé

Laboratoire
Biométrie et Biologie Evolutive

<http://mathsv.univ-lyon1.fr>



Déterminisme et Hasard



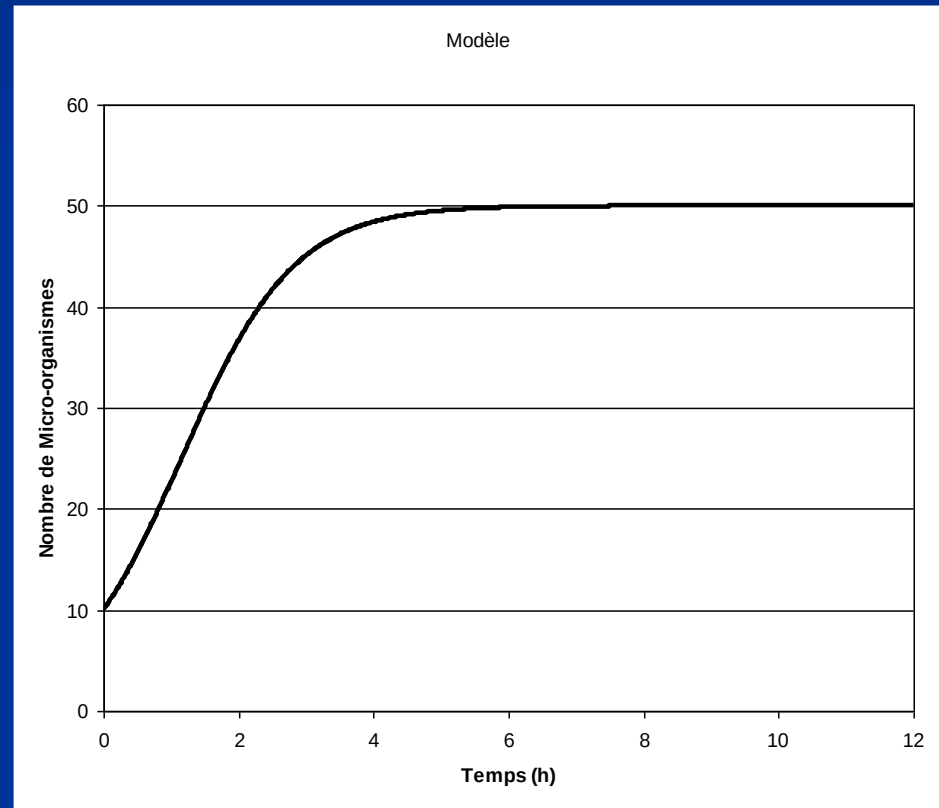
Peut-on prédire l'évolution au cours du temps d'un phénomène biologique ?

Partie déterministe

Modéliser le
phénomène par une
fonction

Déterminer les
propriétés de la
fonction

Interpréter en termes
biologiques



Chapitre 1

Fonctions - Généralités



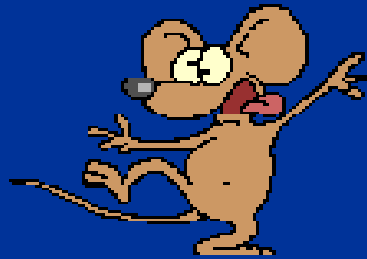
La température d'un lézard (y) en fonction de la température de l'air à l'ombre (x) est approximativement

$$y = f(x) = x$$

La température d'une souris (z) en laboratoire est approximativement

$$Z = c$$

avec c constante

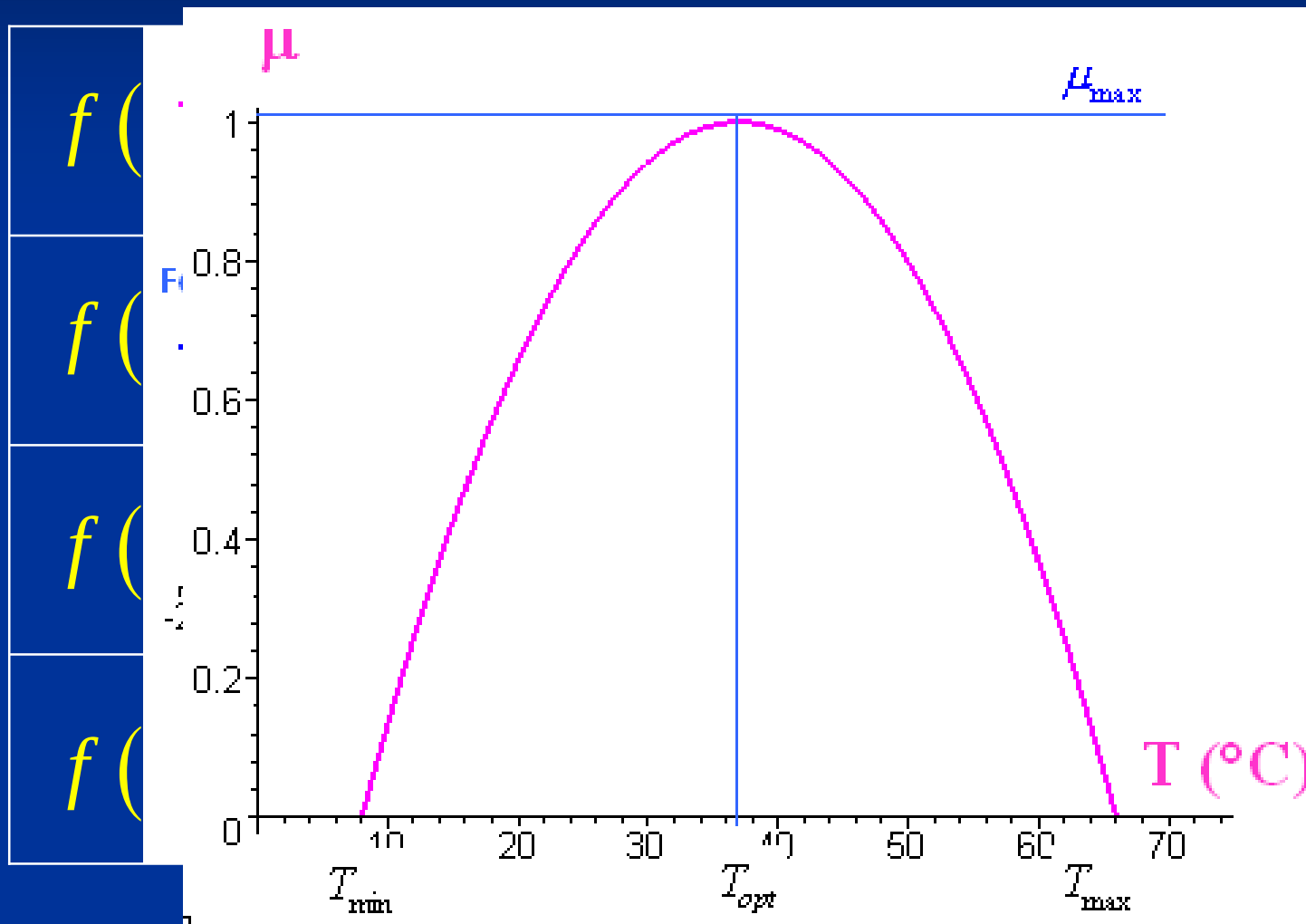


Application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à un réel x de $\mathbb{R}$ fait correspondre un réel UNIQUE $y = f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Fonctions usuelles

- Fonctions polynômes
- Fonctions homographiques
- Fonctions trigonométriques
- La fonction logarithme népérien : $\ln$
- La fonction exponentielle : e
- Fonctions puissances

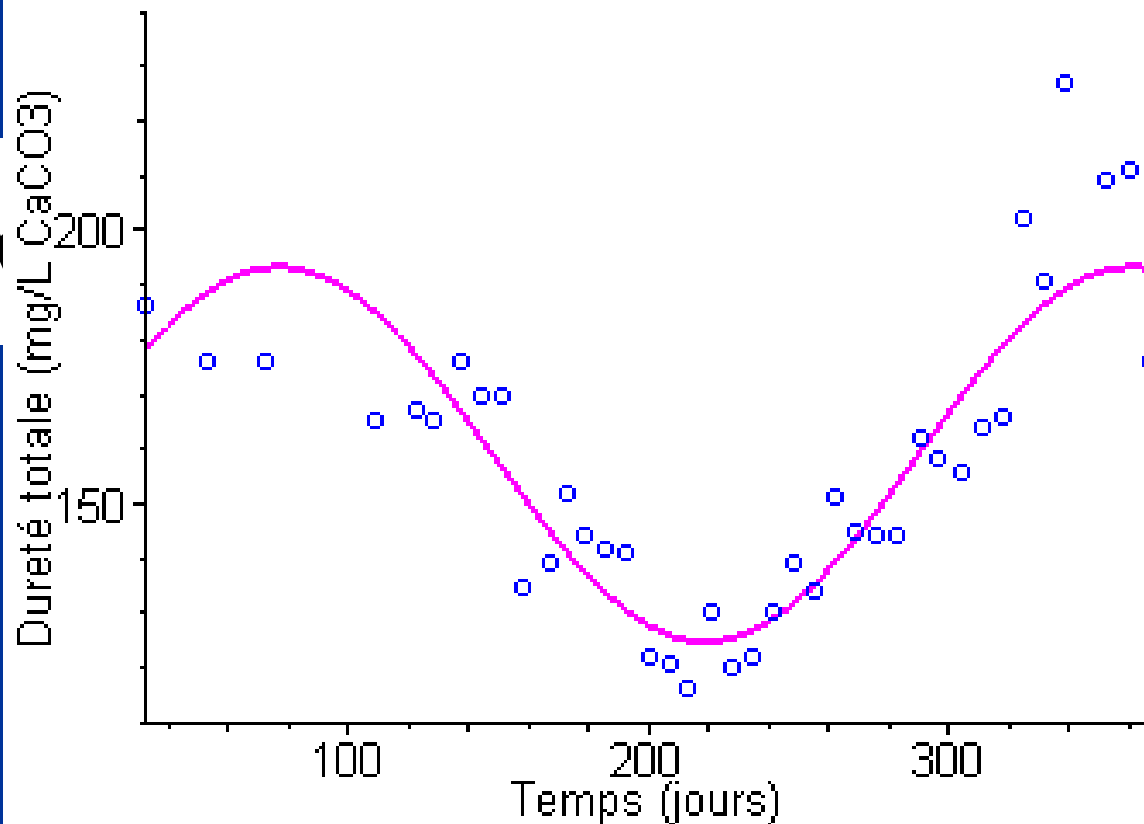
$$\mu = -T^2 + aT + b$$



Fonctions trigonométriques

$$D = \alpha \cos(\omega t + \varphi) + \beta = f(t)$$

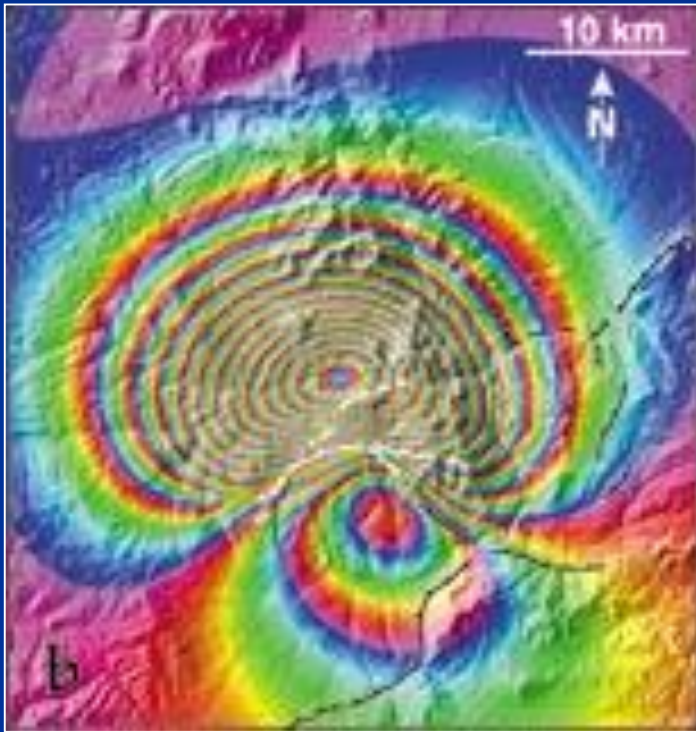
$f(x)$



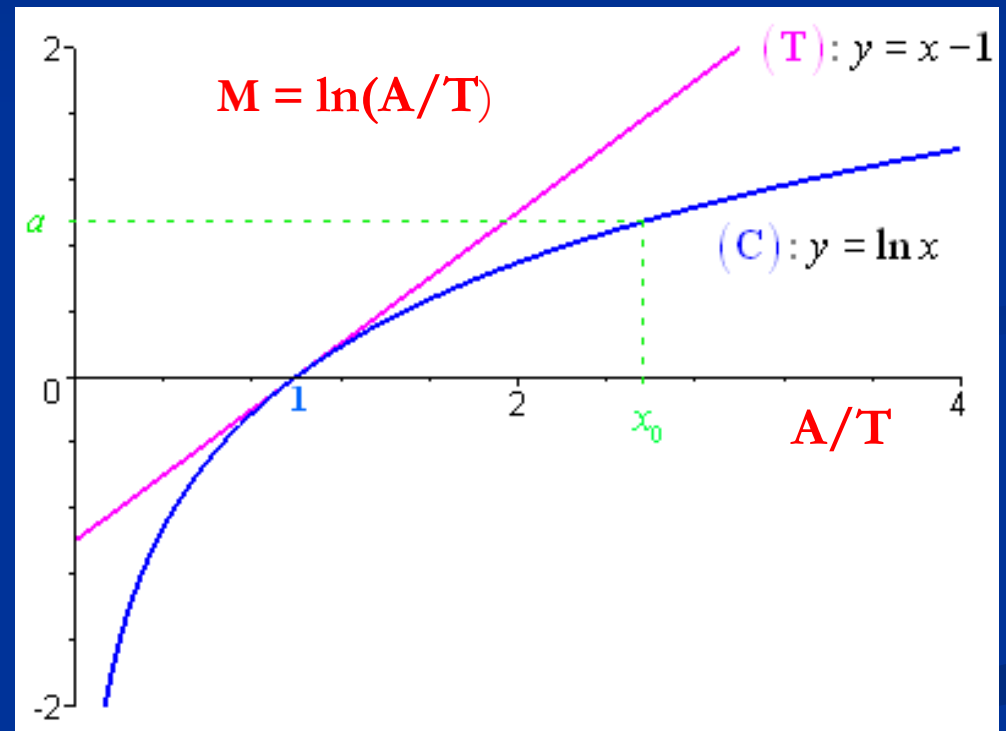
(dx)

La fonction logarithme népérien

Mesurer la magnitude des ondes d'un tremblement de terre



Japon 1906 Chili 1960

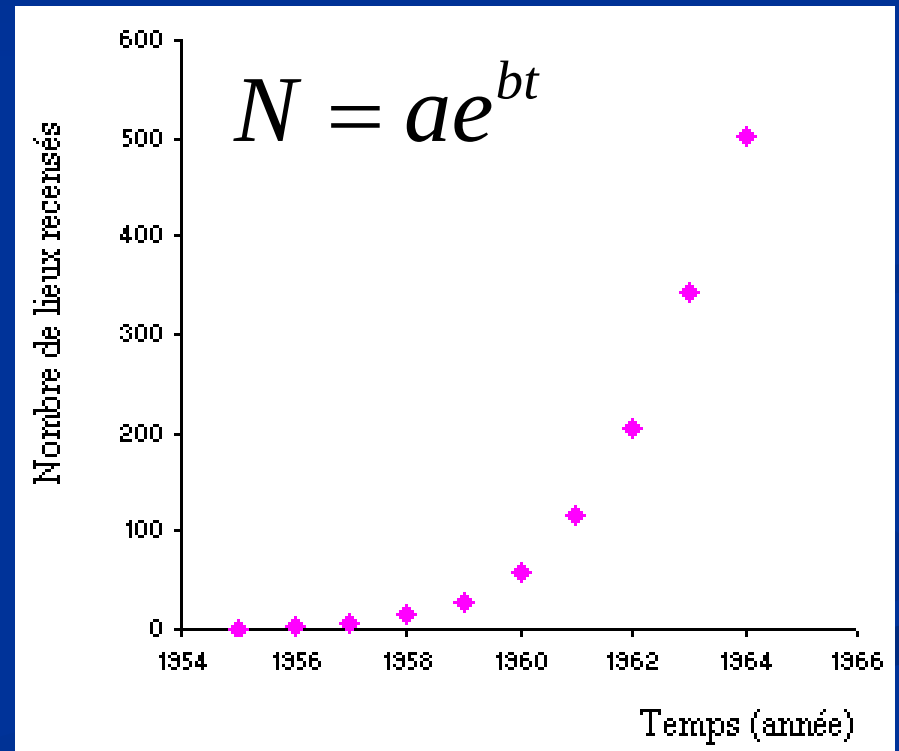


A: amplitude des oscillations, T: période

La fonction exponentielle

Croissance d'une population de tourterelles

Au début du 20ème siècle, les populations de tourterelles turques ont *envahi* l'Europe d'Est en Ouest et arrivent en Grande Bretagne : 1 lieu recensé en 1955... 501 en 1964



Fonction réciproque

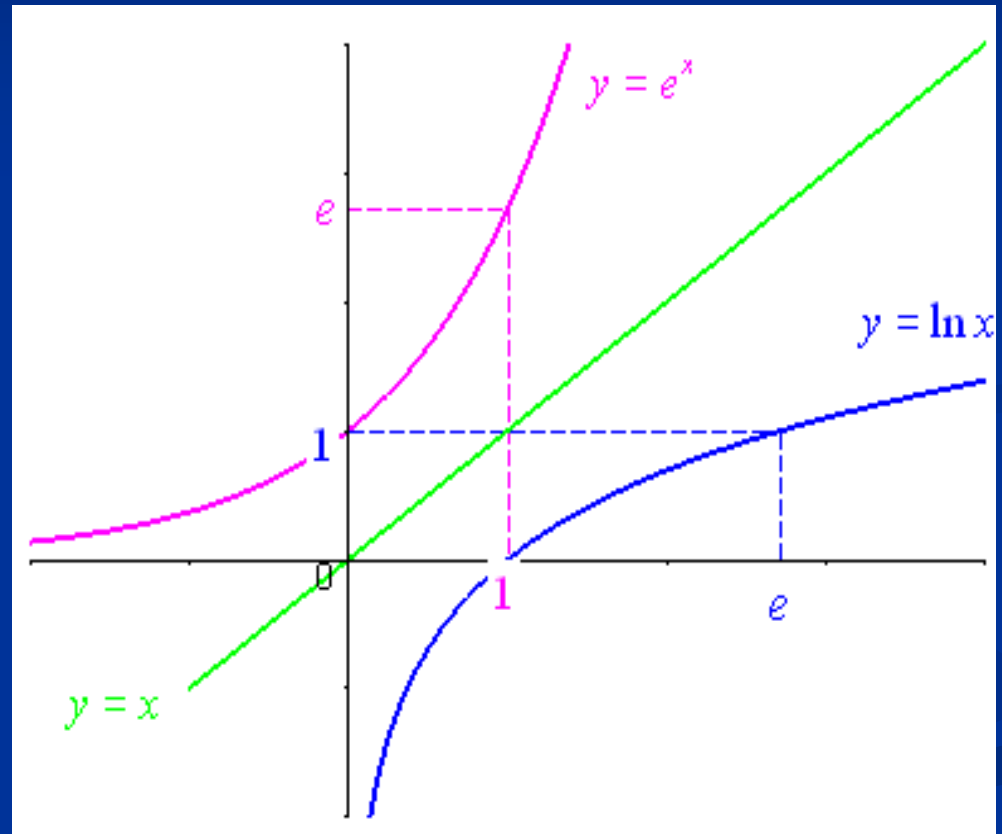
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$Df \rightarrow f(Df)$$

$$x \rightarrow y = f(x) = e^x$$

$$f(Df) \rightarrow Df$$

$$y \rightarrow x = f^{-1}(y) = \ln y$$



Plan d'étude d'une fonction

A. D_f

B. Symétrie

C. Continuité-limites

D. Asymptotes

E. Sens de variation

$$f'(x)$$

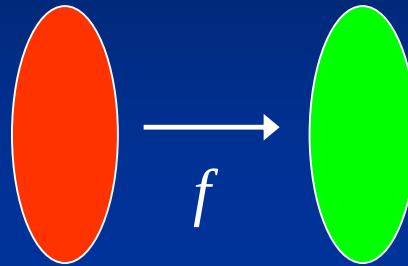
F. Concavité/convexité

$$f''(x)$$

G. Tableau de variation

H. Graphe

A. Domaine de définition

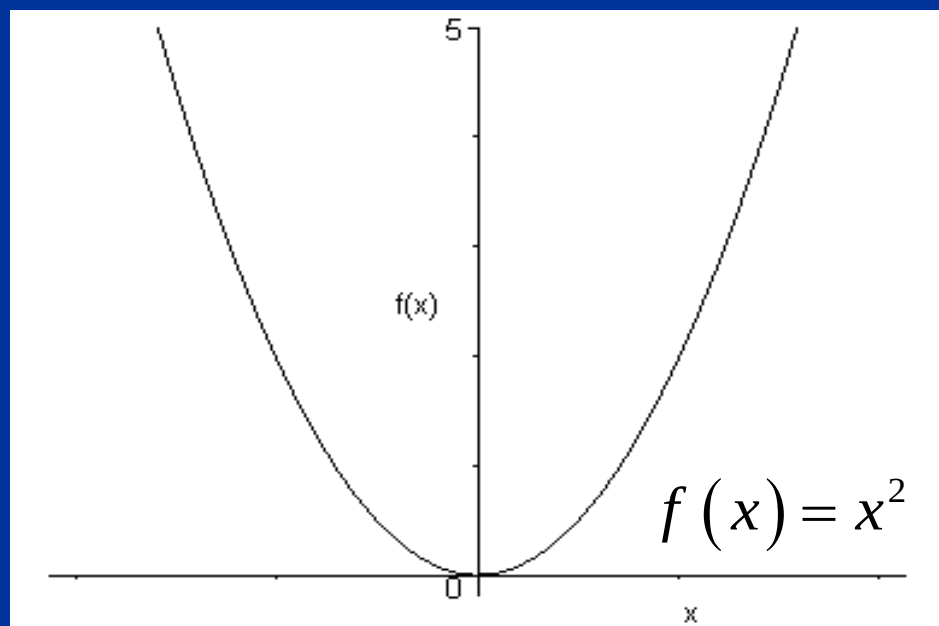


- $D_f = \text{Domaine de définition}$
Ensemble de départ (ensemble des **antécédents**) =
l'ensemble des x
- $f(D_f) = \text{Ensemble d'arrivée (ou ensemble des images)} = \text{l'ensemble des } y$

B. Symétrie : paire ou impaire ?

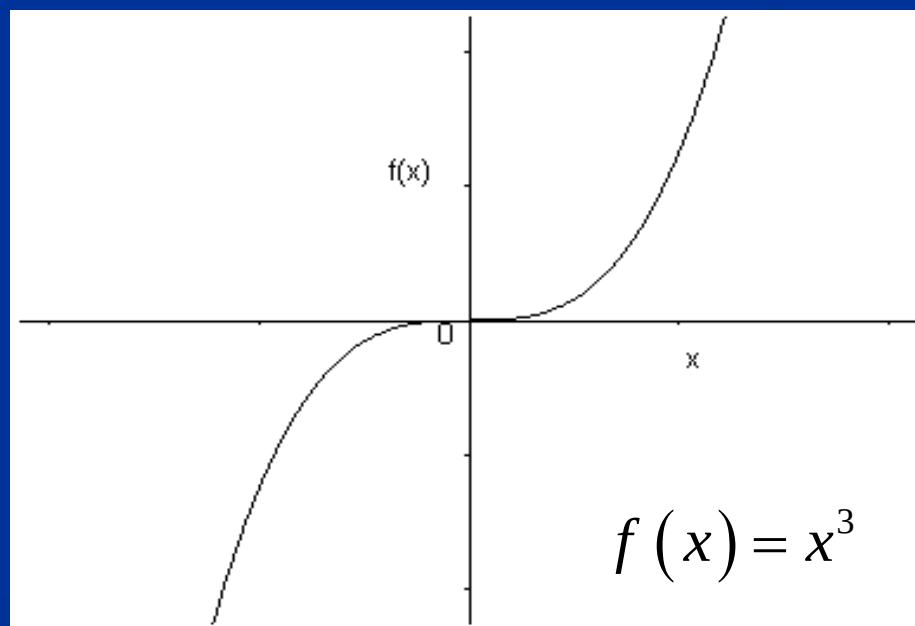
Fonction paire

$$f(x) = f(-x)$$



Fonction impaire

$$f(-x) = -f(x)$$



C. Continuité - Limite

Si les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, alors cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.

Cauchy, 1821

Opérations sur les limites

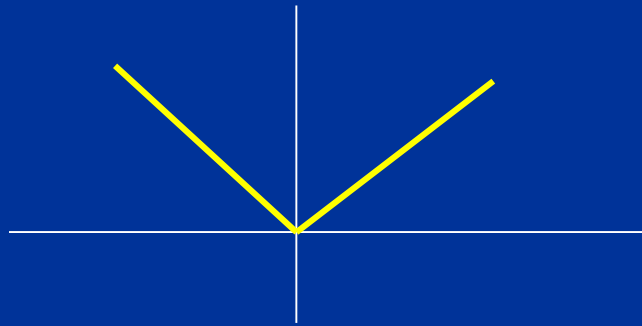
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Formes indéterminées

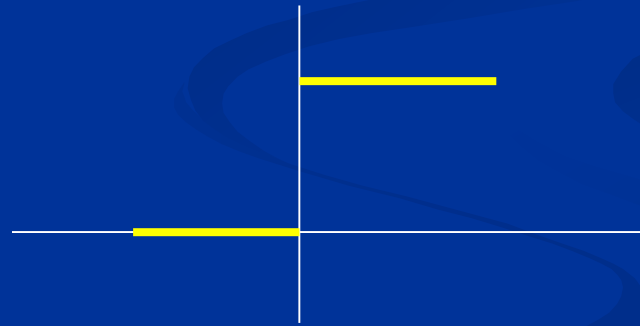
$\infty - \infty$	$0 \times \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
-------------------	-------------------	---------------	-------------------------

C. Continuité - Limite

Une fonction est **continue** en un point x_0 si la limite en ce point existe :



Continue en (0,0)

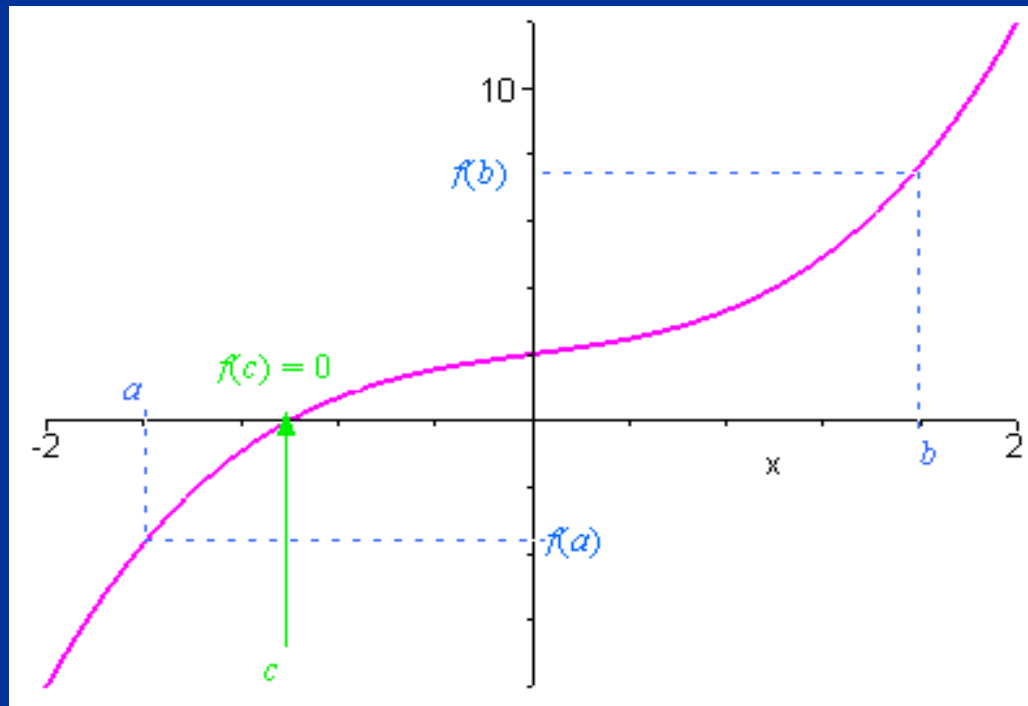


Pas continue en (0,0)

Théorème des valeurs intermédiaires

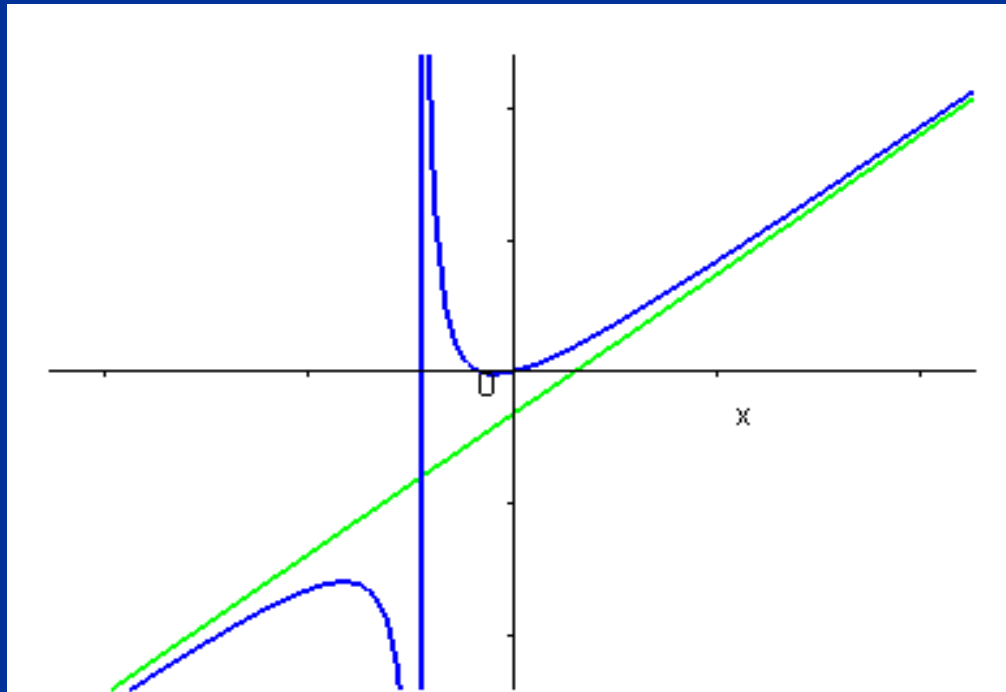
Soit f continue sur $[a;b]$

$$f(a) f(b) \leq 0 \Rightarrow \exists c \in]a,b[\text{ / } f(c) = 0$$



D. Asymptotes

Si la courbe de f s'approche infiniment près d'une droite, celle-ci s'appelle une **asymptote**



Asymptote verticale

Asymptote oblique

Asymptotes

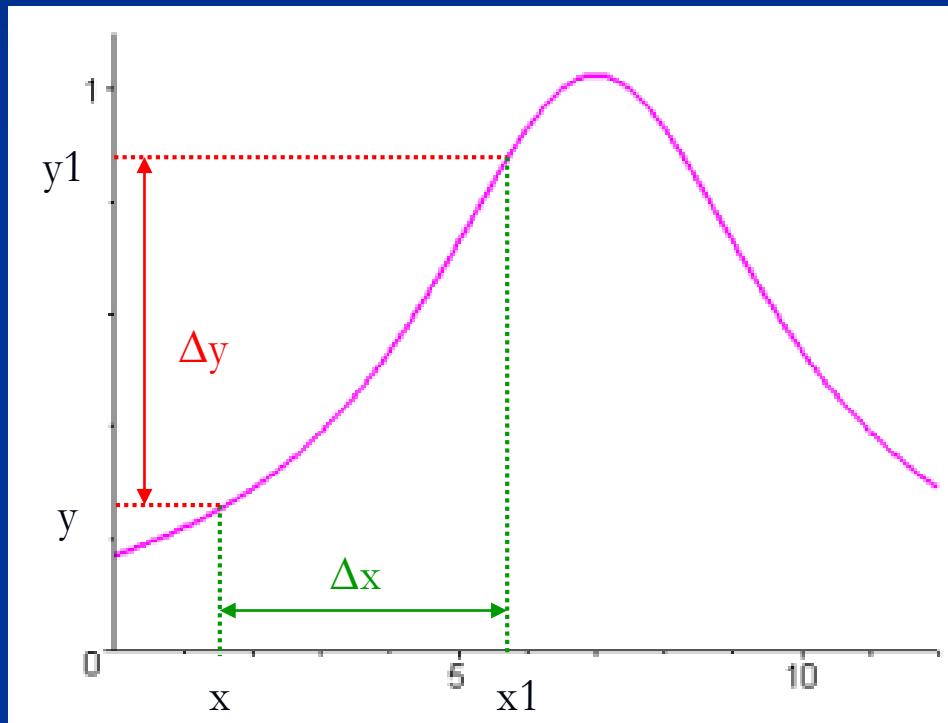
- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$
il y a une asymptote verticale passant par $x = x_0$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$
il y a une asymptote horizontale passant par $y = l$
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
il y a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

$$\text{si } a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax$$

E. Dérivées

Notion d'accroissement



$$\Delta x = x_1 - x \Leftrightarrow x_1 = x + \Delta x$$

$$\Delta y = y_1 - y = f(x_1) - f(x)$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

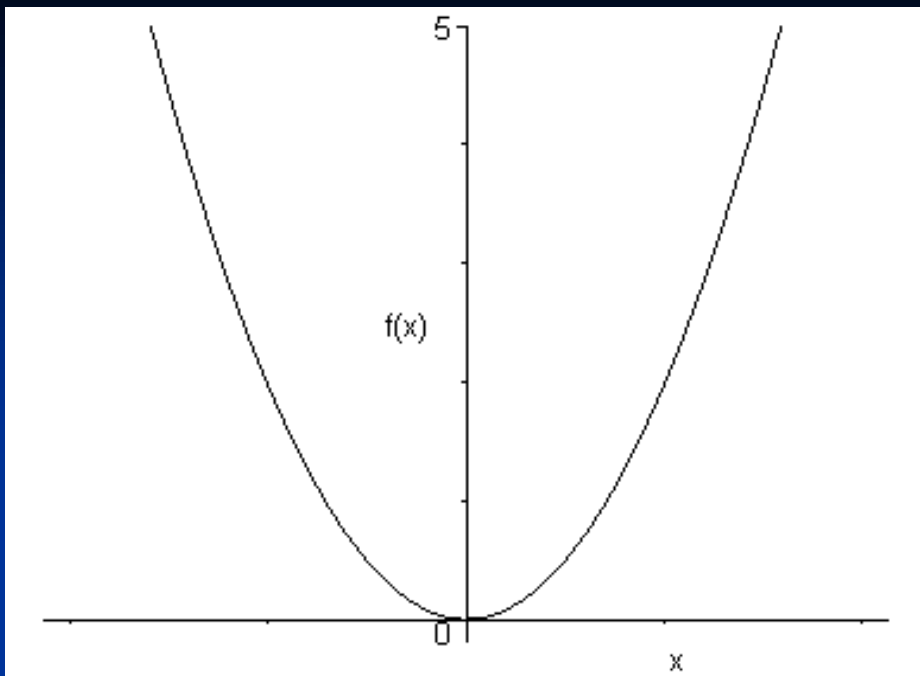
Notion de dérivée

Fonction dérivée

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Dérivée en un point x_0

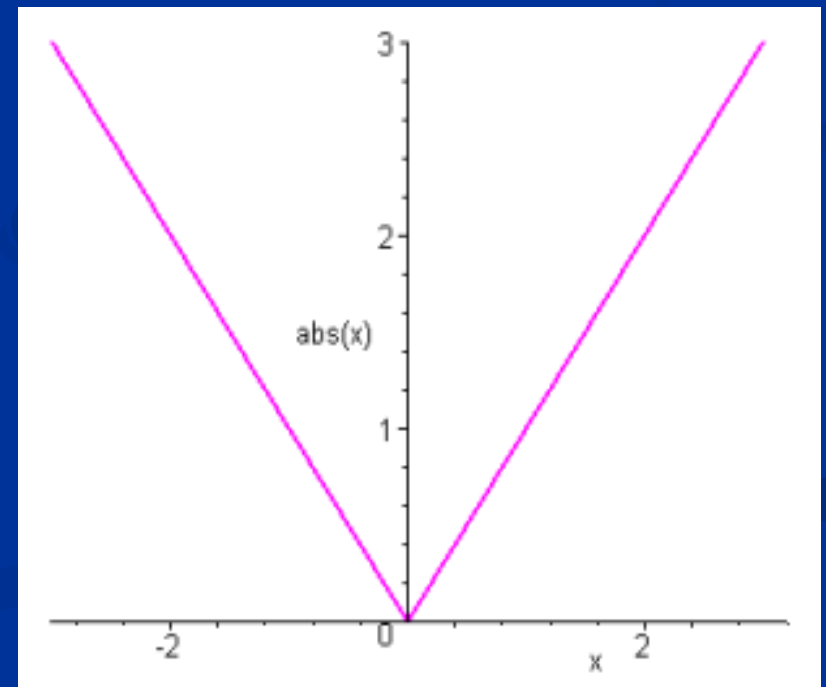
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$



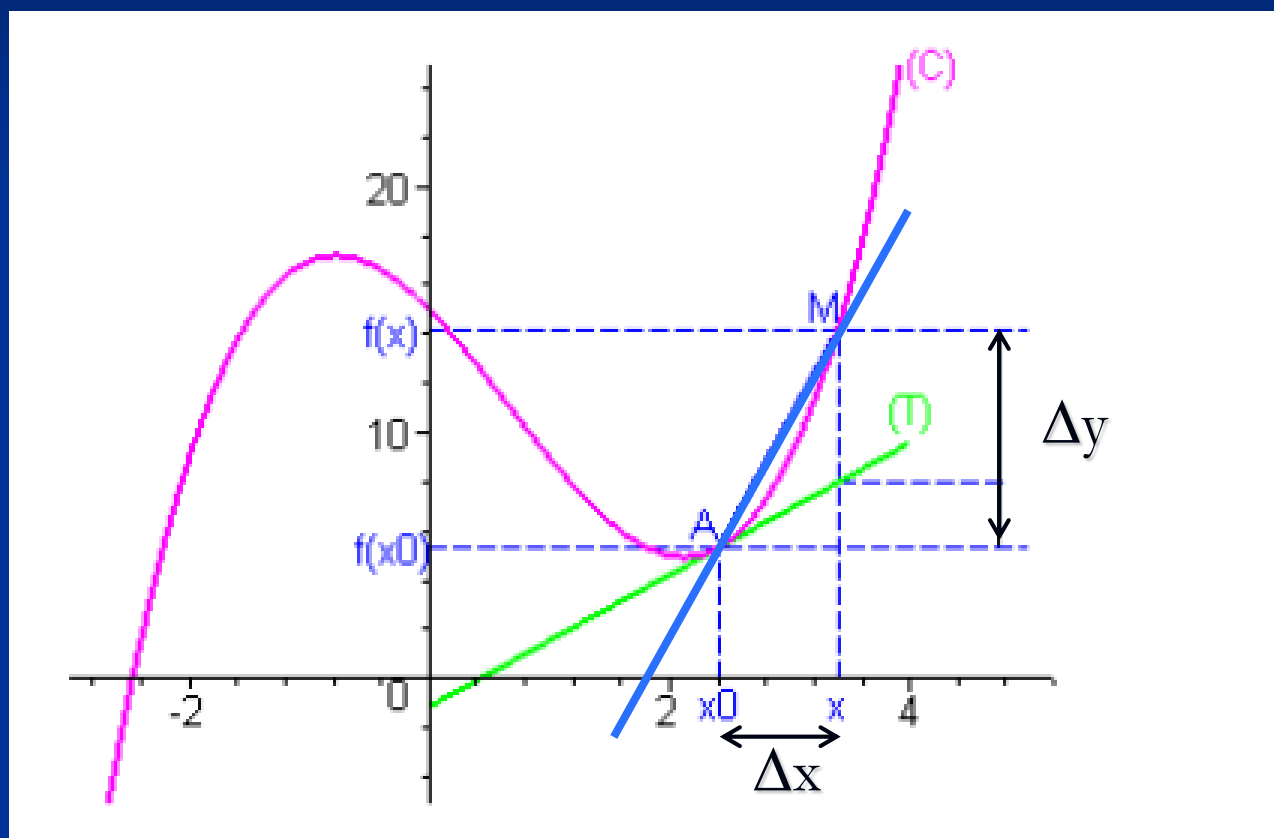
$$\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0 = f'(x_0)$$

Dérivable en tout point

Non dérivable en 0



Interprétation géométrique



$$(T): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Fonctions

Dérivées

a

0

$ax+b$

a

$\sin(x)$

$\cos(x)$

$\cos(x)$

$-\sin(x)$

$\operatorname{tg}(x)$

$1+\operatorname{tg}^2(x)$

$\arcsin(x)$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos(x)$

$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\operatorname{arctg}(x)$

$\frac{1}{1+x^2}$

Fonctions

$$1/x$$

$$x^n$$

$$\ln(x)$$

$$e^x$$

$$a^x$$

Dérivées

$$-1/x^2$$

$$nx^{n-1}$$

$$1/x$$

$$e^x$$

$$a^x \ln(a)$$

Fonctions

$$U+V$$

$$UV$$

$$\frac{U}{V}$$

$$\ln(U)$$

$$e^U$$

$$U^n$$

Dérivées

$$U'+V'$$

$$U'V+UV'$$

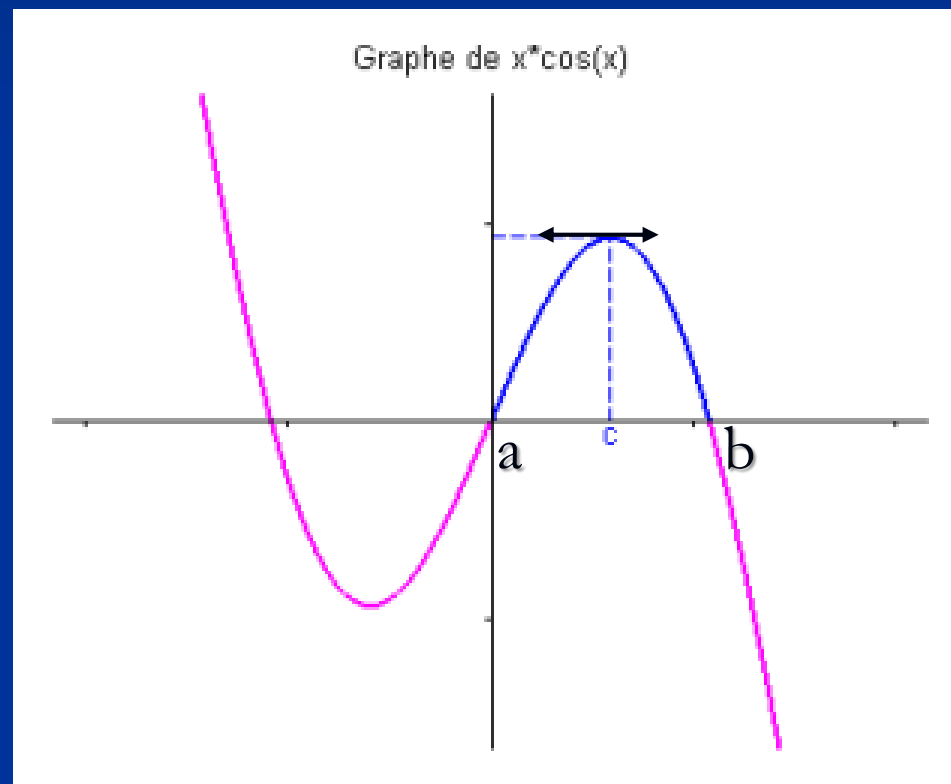
$$\frac{U'V-UV'}{V^2}$$

$$\frac{U'}{U}$$

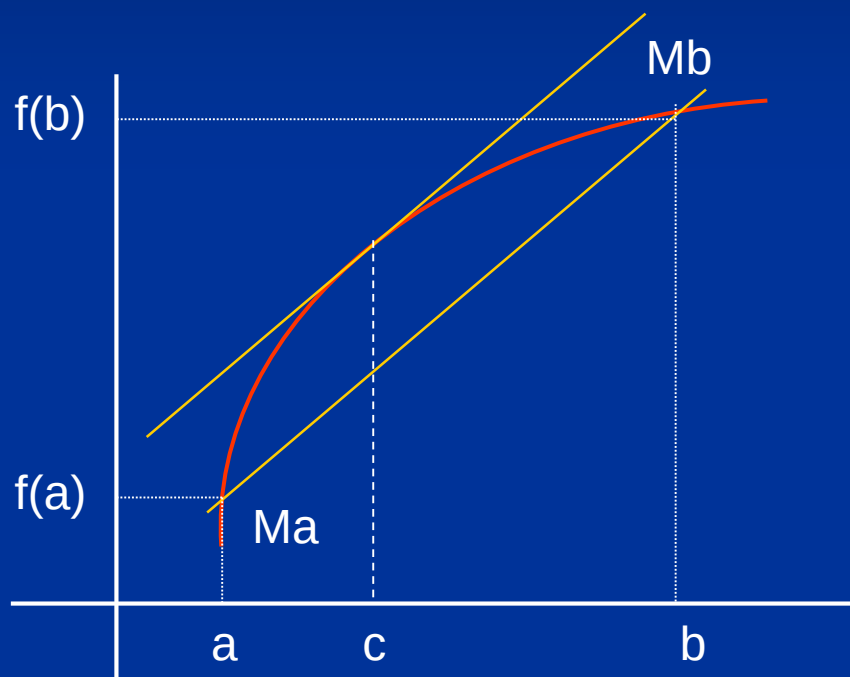
$$U'e^U$$

$$nU'U^{n-1}$$

Théorème de ROLLE



Théorème des accroissements finis

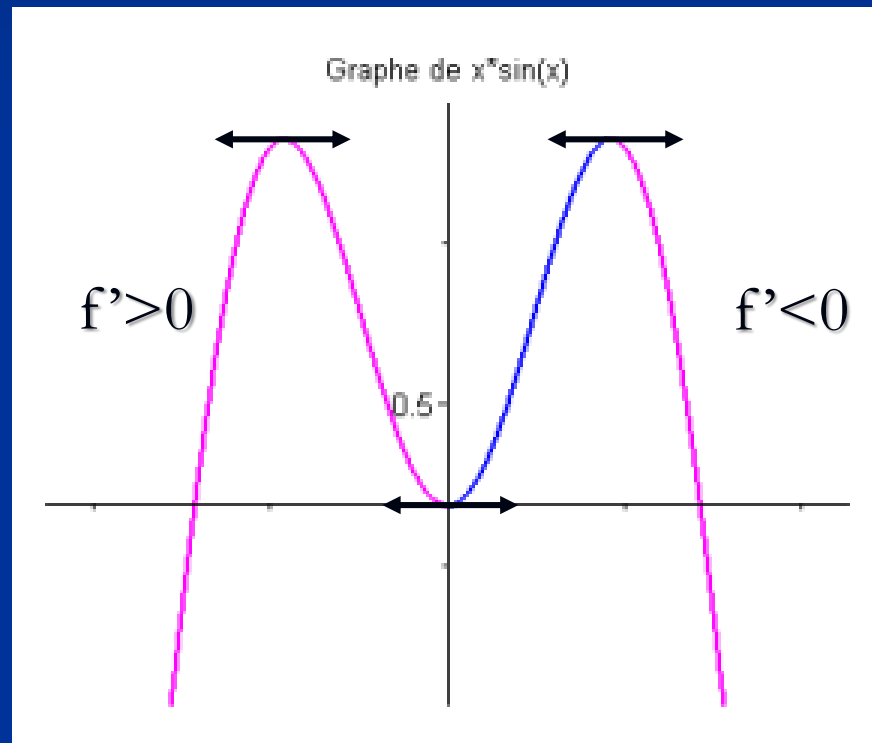


$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

E. Dérivée: Sens de variation

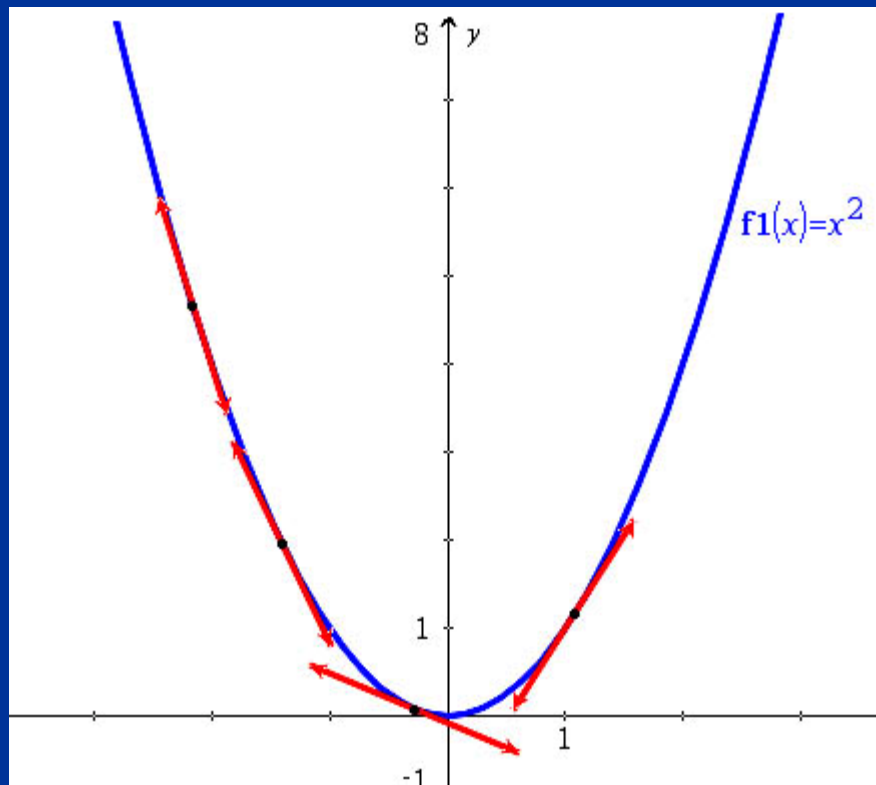
- f est constante sur $[a,b]$
si la dérivée est nulle sur $[a,b]$
- f est croissante sur $[a,b]$
si la dérivée est positive sur $[a,b]$
- f est décroissante sur $[a,b]$
si la dérivée est négative sur $[a,b]$
- f admet un extremum en x
si la dérivée s'annule en x

Sens de variation



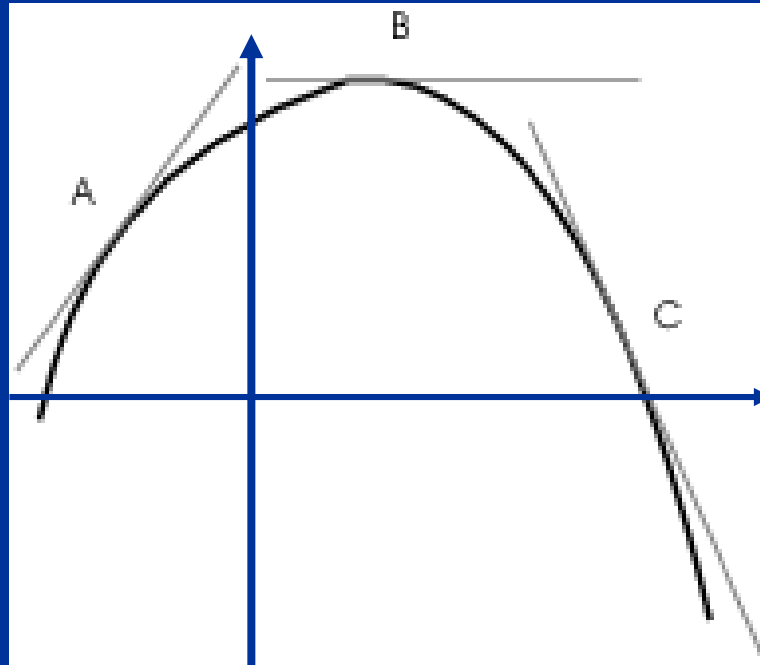
F. Dérivée: Convexité

f est **convexe** sur un intervalle si sa dérivée seconde est positive (le graphe de f est courbé vers le haut)



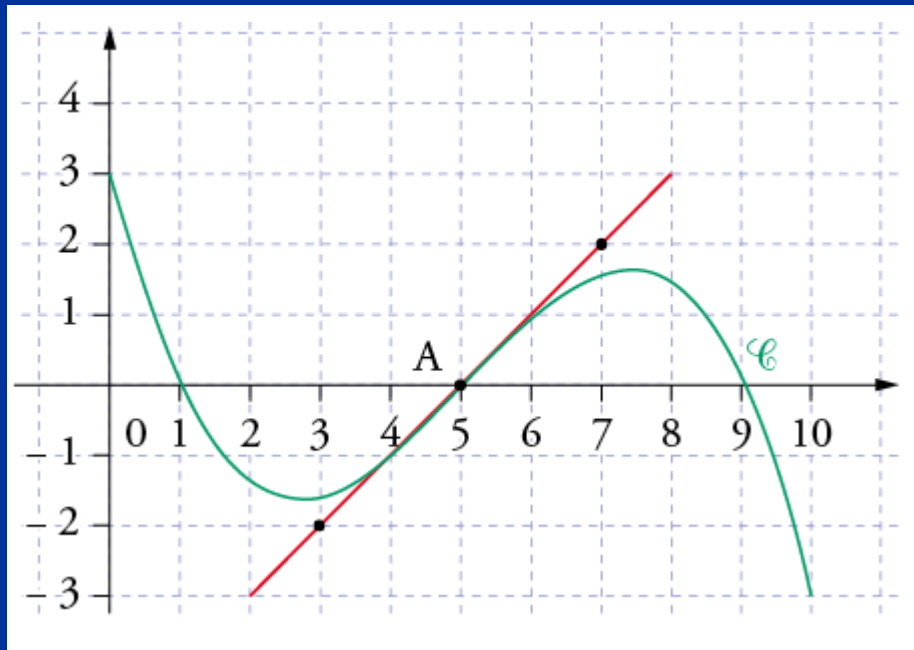
F. Dérivée: Concavité

f est **concave** sur un intervalle si sa dérivée seconde est négative



F. Dérivée: Point d'inflexion

f a un **point d'inflexion** si la dérivée seconde s'annule ET change de signe en ce point.



La tangente traverse la courbe
au point d'inflexion

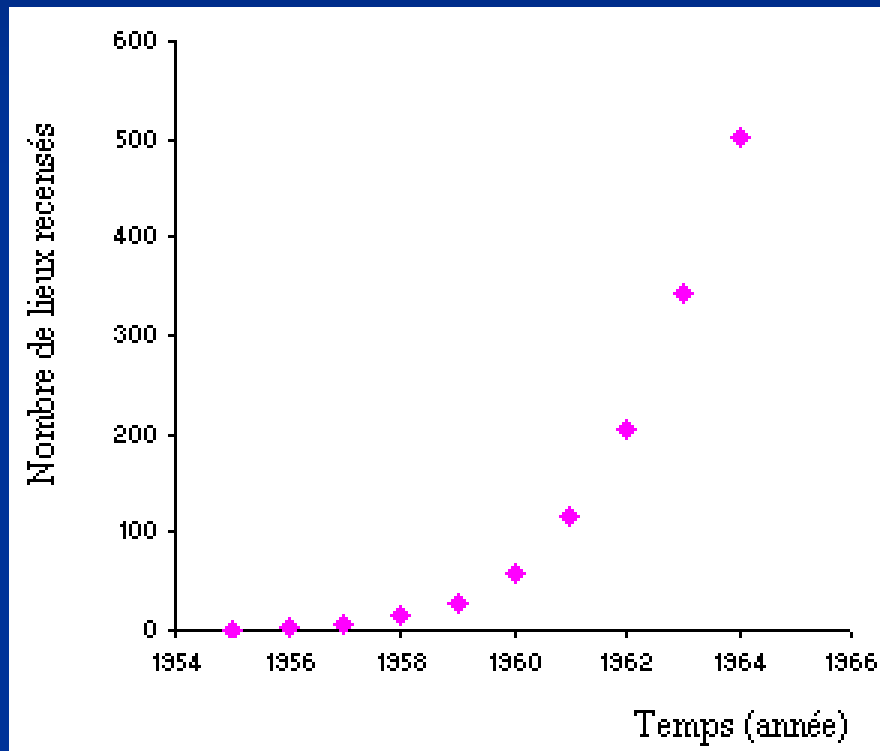
G. Le tableau de variation

1. Construire le tableau à partir du signe de la dérivée.

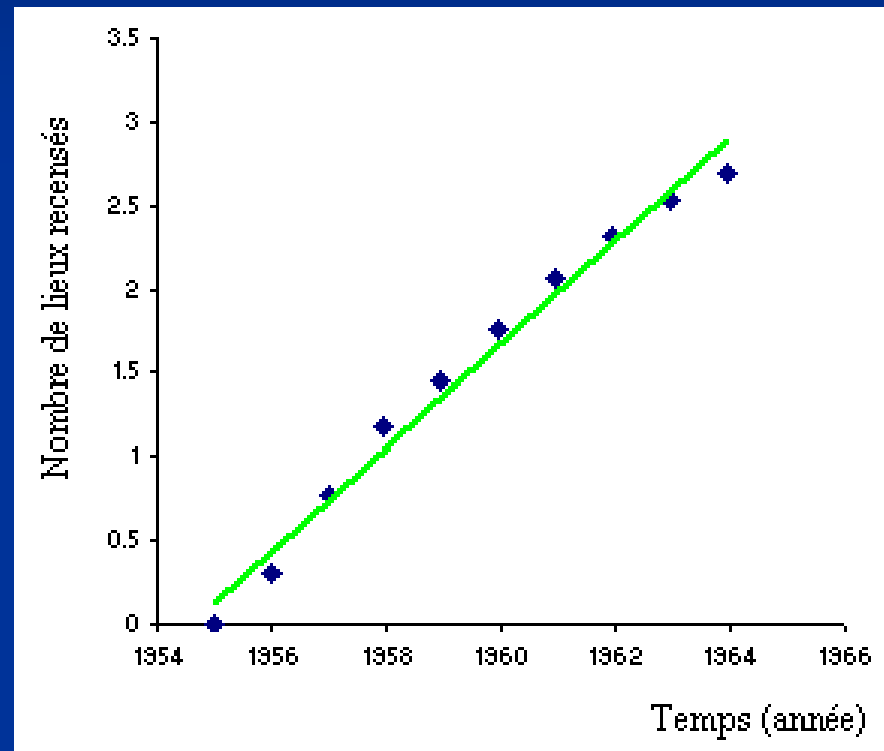
x	$-\infty$	3	5	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	
$f(x)$				

2. Compléter ce tableau en rajoutant les limites de f aux bornes des intervalles, et lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

ln(fonction exponentielle) = droite



$$N = ae^{bt}$$



$$\ln N = \ln a + bt$$