Chapitre 3

Équations Différentielles

Leibniz 1686

Définition

On appelle **équation différentielle** d'ordre n, toute équation qui établit une *relation* entre la variable x, une fonction inconnue $y(x)$ et ses n premières dérivées $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

$F(x, y, y')=0$ est une équation différentielle du premier ordre

$F(x, y, y', y'')=0$ est une équation différentielle du second ordre

Équations Différentielles d'ordre 1

1. À variables séparables
2. Homogènes
3. Linéaires
   - SSM
   - ASM
   - À coefficients constants

E. D. 1 à variables séparables

$$y' = f\left(x\right)g\left(y\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(x\right)g\left(y\right)$$

$$\frac{dy}{g\left(y\right)} = f\left(x\right)dx$$

$$\int \frac{dy}{g\left(y\right)} = \int f\left(x\right)dx \Leftrightarrow G\left(y\right) = F\left(x\right) + C$$

E. D. 1 homogène

Elles sont de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

on pose $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u = f(u)$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{dx} x = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

E. D. 1 linéaires

Elles sont de la forme : $A(x)y'+B(x)y = C(x)$

1. <u>Cas particulier</u> : $C(x) = 0$

On parle d'équation linéaire sans second membre

=> équation à variables séparables

E. D. 1 linéaires

Elles sont de la forme : $A(x)y'+B(x)y = C(x)$

2. <u>Cas général</u> : $C(x) \neq 0$

On parle d'équation linéaire avec second membre

=> Méthode de la variation de la constante

E. D. 1 linéaires

Elles sont de la forme : $A(x)y'+B(x)y = C(x)$

3. <u>Coefficients constants</u> : $ay'+by = C(x)$

=> Méthode de la variation de la constante

ou Méthode de la solution particulière

Equation différentielle du premier ordre linéaire à coefficients constants : $y' + ay = f(x)$	Solution particulière Soit $\phi(r) = r + a$ l'équation caractéristique
Second membre de la forme : $f(x) = P(x)$ avec $d°P = n$	$y_p = x^k P(x)$ $k = 0$ si 0 n'est pas solution de l'équation $\phi(r) = 0$ $k = 1$ si 0 est solution de l'équation $\phi(r) = 0$
Second membre de la forme : $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$ avec $d°P = n$	$y_p = x^k e^{\alpha x} P(x)$ $k = 0$ si α n'est pas solution de l'équation $\phi(r) = 0$ $k = 1$ si α est solution de l'équation $\phi(r) = 0$
Second membre de la forme : $f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x$	$y_p = C\cos\beta x + D\sin\beta x$