Mathématiques pour les Sciences de la Vie

Analyse – Primitives / Intégration

Pr. Sandrine CHARLES

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

2 février 2020

Table des matières

1. Généralités
2. Propriétés
3. Méthodes de calcul

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Notion de Primitive

Soit F une fonction dérivable telle que $F'(x) = f(x)\ \forall x \in D_F$.

$$F \quad \underset{\text{Intégrer}}{\overset{\text{Dériver}}{\rightleftarrows}} \quad f$$

- F est une primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$
- Si F est une primitive de f, alors $F + K$ l'est aussi :

$$(F + K)' = F' = f$$

- L'ensemble des primitives de f est noté

$$\int f(x)\, dx$$

On a donc $F(x) = \int f(x)\, dx$, il s'agit d'un convention de notation.

Plan détaillé

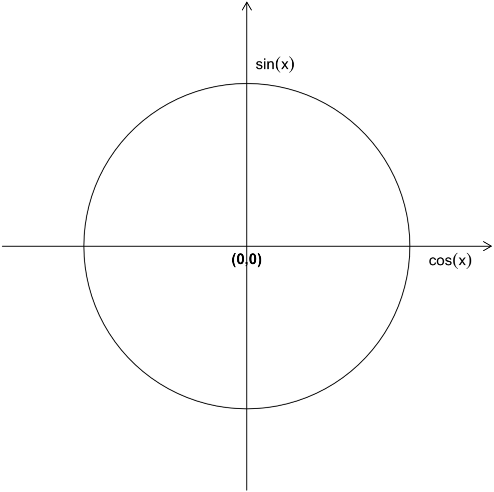
1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Exemples de primitives

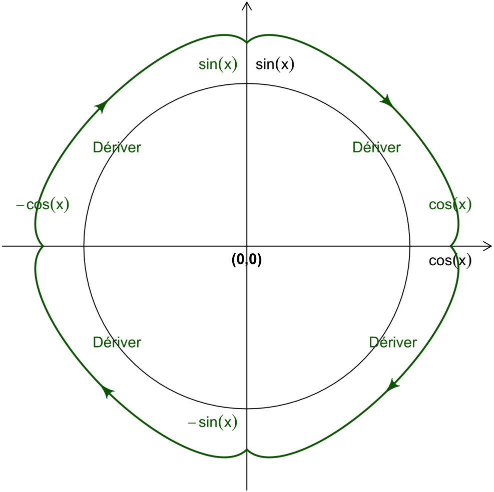
Dérivée	Primitive
x^α, avec $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\ln x$	$x \ln x - x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

Ex. : Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$. Une primitive de $\sqrt{x}$ est $\frac{2x^{3/2}}{3}$.

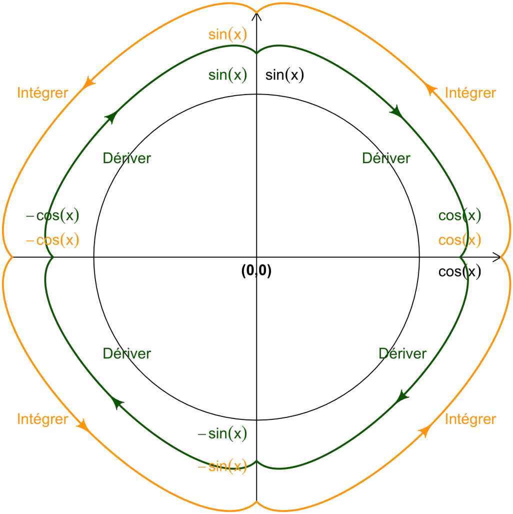
Dériver/intégrer les fonctions trigonométriques



Dériver/intégrer les fonctions trigonométriques



Dériver/intégrer les fonctions trigonométriques



Exemples de primitives

Dérivée	Primitive
$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert$

Ex. : La fonction $\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ a pour primitive $2\sqrt{x^2-1}$.
La fonction $\frac{2x}{x^2-1}$ a pour primitive $\ln\lvert x^2-1\rvert$.

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Interprétation géométrique

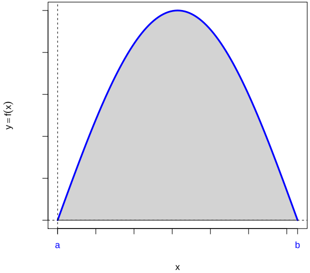
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

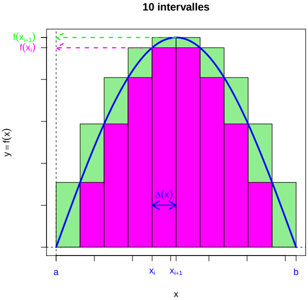
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

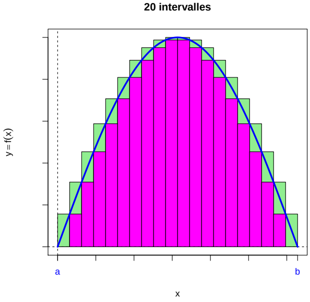
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

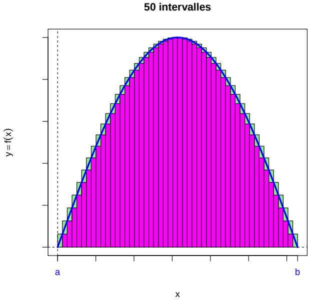
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : $f(x) = e^{-x}$ sur $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-0}\int_0^4 e^{-x}\,dx &= \frac{1}{4}\left[-e^{-x}\right]_0^4\\ &= -\frac{1}{4}\left(e^{-4}-1\right)\\ &\sim 0.245\end{aligned}$$

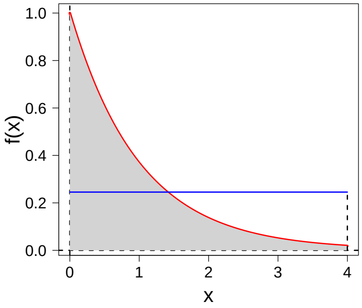


Table des matières

1 Généralités

2 Propriétés

3 Méthodes de calcul

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Conséquences :

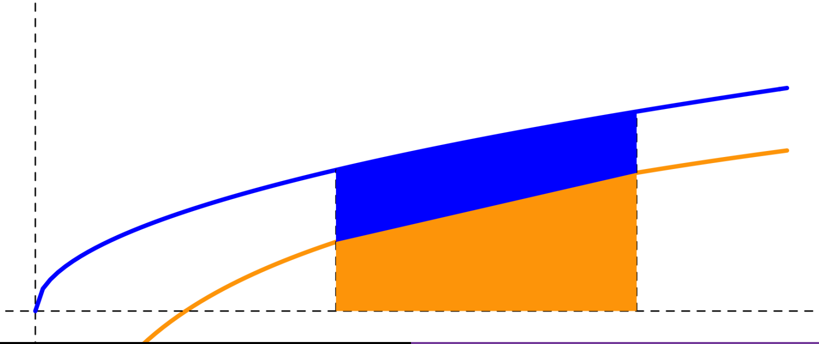
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$)

- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$



Plan détaillé

2 Propriétés
- Relation de Chasles
- Inégalités et intégration
- Parité et intégration

Intégrales de fonctions paires/impaires

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

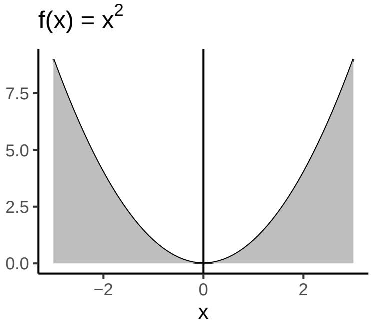


Table des matières

1. Généralités
2. Propriétés
3. Méthodes de calcul

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Décomposition en somme

Principe

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\ dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Exemples

Calculer les primitives de $f(x) = 2x - 3x^2$
Calculer l'intégrale de $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur $[1;2]$.

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Changement de variable

Principe

On pose $x = \phi(t)$ d'où $dx = \phi'(t)dt$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f\circ\phi)(t)\phi'(t)\,dt$$

Puisque $x = \phi(t)$, $f(x) = f(\phi(t)) = (f\circ\phi)(t)$

et puisque $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt$.

Bien penser à changer aussi les bornes de l'intégrale.

Changement de variable
Exemple

Calculez $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

Changement de variable

Exemple : $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

On pose $t = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - t$

- $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$
- $x = 1 \Leftrightarrow t = 0$
- $x = 1 - t \Rightarrow dx = -\,dt$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_1^0 -(1-t)^2\sqrt{t}\,dt = \int_0^1 (1-t)^2\sqrt{t}\,dt$$

$$(1-t)^2\sqrt{t} = t^{1/2} - 2t^{3/2} + t^{5/2}$$

$$\int_0^1 \left(t^{1/2} - 2t^{3/2} + t^{5/2}\right) dt = \left[\frac{t^{3/2}}{3/2} - 2\frac{t^{5/2}}{5/2} + \frac{t^{7/2}}{7/2}\right]_0^1 = \frac{16}{105}$$

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est un rapport de deux fonctions polynomes.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynomes.
On suppose ici degré(A) $\leq$ degré(B).
Principe : Réduire $f(x)$ en éléments simples pour obtenir :

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)} = \sum_i \frac{a_i}{x - r_i}$$

où les r_i sont les racines simples du polynôme $B(x)$: $B(r_i) = 0\,\forall i$.
Il faut alors déterminer les coefficients a_i appropriés.

Exemple

On veut calculer $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a_1}{x-0} + \frac{a_2}{x-1} = \frac{a_1(x-1) + a_2 x}{x(x-1)} = \frac{(a_1+a_2)x - a_1}{x(x-1)}$$

Par identification, on obtient $a_1 + a_2 = 0$ et $-a_1 = 1$, soit $a_1 = -1$ et $a_2 = 1$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx &= \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= -\ln|x| + \ln|x-1| + K \\ &= \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + K\end{aligned}$$

Deuxième exemple

$$\int \frac{x+1}{x^2-4}\,dx$$

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Intégration par parties
Principe

Dérivée d'un produit de fonctions $u(x)v(x)$.

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

$$\Leftrightarrow \; u'(x)v(x) = (u(x)v(x))' - u(x)v'(x)$$

En intégrant de part et d'autre de l'égalité :

$$\int (u'v)(x)\,dx = \int \left((uv)'(x) - (uv')(x)\right)\,dx$$

Soit

$$\int (u'v)(x)\,dx = \int (uv)'(x)\,dx - \int (uv')(x)\,dx$$

Soit encore

$$\int (u'v)(x)\,dx = (uv)(x) - \int (uv')(x)\,dx$$

Intégration par parties
Exemple

Que vaut $\int \ln x \, dx$?

On pose :

- $u'(x) = 1 \Leftarrow u(x) = x$
- $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

La formule de l'intégration par partie donne :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K$$

Intégration par parties
Quand l'utiliser ?

- Produits de fonctions
- Simplifier des produits de fonctions à intégrer (éventuellement, plusieurs IPP)
  - $\int P(x)e^x\,dx$ où P est un polynôme.
  - $\int P(x)\sin x\,dx$ ou $\int P(x)\cos x\,dx$ où $P(x)$ est un polynôme.
- Faire apparaître une propriété simple :
  $\int e^x \sin x\,dx$ (2 IPP nécessaires, voir ci-après)

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx$

Première intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx = \int (u_1' v_1)(x) \, dx$

- $u_1'(x) = e^x \Leftarrow u_1(x) = e^x$
- $v_1(x) = \sin x \Rightarrow v_1'(x) = \cos x$

IPP$_1$: $\int (u_1' v_1)(x) \, dx = [(u_1 v_1)(x)] - \int (u_1 v_1')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$$

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$

Deuxième intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx = \int (u_2' v_2)(x) \, dx$

- $u_2'(x) = e^x \Leftarrow u_2(x) = e^x$
- $v_2(x) = \cos x \Rightarrow v_2'(x) = -\sin x$

IPP$_2$: $\int (u_2' v_2)(x) \, dx = [(u_2 v_2)(x)] - \int (u_2 v_2')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \left([e^x \cos x] - \int -e^x \sin x \, dx \right)$$

Soit :

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + K$$