

# Mathématiques pour les Sciences de la Vie

## Analyse – Étude de fonctions

**Pr. Sandrine CHARLES**

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

1<sup>er</sup> février 2020

# Table des matières

1 Introduction

2 Généralités

3 Limites

4 Dérivation

# Organisation du cours d'analyse

- 1 Étude de fonctions ;
- 2 Intégration ;
- 3 Équations différentielles.

# Méthode d'étude d'une fonction

- ① Domaine de définition.
- ② Parité / Périodicité
- ③ Étude des variations sur un intervalle approprié
  - Dérivation
  - Étude des limites aux bornes de l'intervalle
  - Tableau de variation (avec limites et extrema).
- ④ Points d'inflexion (éventuellement).
- ⑤ Asymptotes obliques (éventuellement).
- ⑥ Représentation graphique

# Table des matières

1 Introduction

2 Généralités

3 Limites

4 Dérivation

# Plan détaillé

- 2 Généralités
  - Définitions
  - Opérations sur les fonctions
  - Parité, périodicité
  - Variations d'une fonction

# Fonction réelle d'une variable réelle

**Définition :** Une fonction réelle  $f$  d'une variable réelle est une transformation qui à tout élément  $x$  d'une partie (domaine)  $D \subset \mathbb{R}$  fait correspondre un *unique* élément de  $\mathbb{R}$ , noté  $f(x)$  et appelé *image de  $x$* .

**Notation :**

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

$D$  est le *domaine de définition* de  $f$ , noté  $D_f$ .

# Domaine de définition

**Définition :** Le domaine de définition  $D_f$  d'une fonction  $f$  est l'ensemble des réels  $x$  pour lesquels il existe une **image unique** de  $x$  par la fonction  $f$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists! y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$$

**Exemple :**

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 > 0\} \\ &= ]1, +\infty[ \end{aligned}$$



# Image du domaine de définition

**Définition :** L'image du domaine de définition  $D_f$  d'une fonction  $f$ , notée  $f(D_f)$ , est l'ensemble des réels  $y$  pour lesquels il existe **au moins un** antécédent  $x$  par la fonction  $f$ .

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D_f, y = f(x)\}$$

**Exemple :**

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$D_f = ]1, +\infty[$$

$$f(D_f) = ]0, +\infty[$$

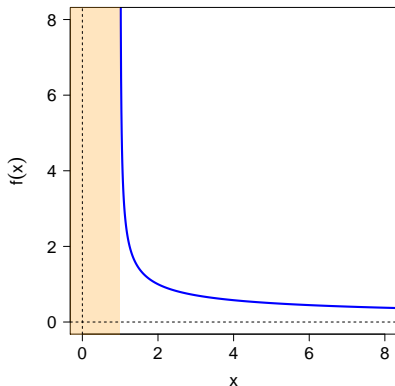
# Graphes d'une fonction

Le graphe d'une fonction  $f$  dans un repère cartésien  $(Ox, Oy)$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x, f(x))$  avec  $x \in D_f$ .

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$D_f = ]1, +\infty[$$

$$f(D_f) = ]0, +\infty[$$



# Plan détaillé

- 2 Généralités
  - Définitions
  - Opérations sur les fonctions
  - Parité, périodicité
  - Variations d'une fonction

# Opérations

$f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur  $D_f$  et  $D_g$ .

- **Produit** :  $(fg)(x) = f(x)g(x)$   
 $D_{fg} = D_f \cap D_g$

- **Somme** :  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$   
 $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

- **Inverse** :  $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$   
 $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \mid f(x) \neq 0\}$

## Opérations

$f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur  $D_f$  et  $D_g$ .

- **Quotient** :  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$   
 $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in (D_f \cap D_g) \mid g(x) \neq 0\}$
- **Multiplication par un réel** :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$   
 $D_{\alpha f} = D_f$
- **Opposé** :  $(-f)(x) = -f(x)$   
 $D_{-f} = D_f$

## Composition de fonctions

$f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur  $D_g$  et  $D_f$ .

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\begin{array}{ccccc} D_g & \xrightarrow{g} & E & & \\ & & D_f & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longmapsto & g(x) & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

# Composition de fonctions : exemples

$$① f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$② f(x) = e^{\sqrt{x}}$$

# Fonction réciproque : définition

$f$  une fonction réelle définie sur  $I$  telle que  $f(I) = J$

$f : I \rightarrow J$

- $f$  admet une fonction réciproque s'il existe une fonction  $g : J \rightarrow I$  telle que  $f \circ g = Id_J$  et  $g \circ f = Id_I$ .
- $g$  est notée  $f^{-1}$ .
- Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont **symétriques** par rapport à la première bissectrice d'équation  $y = x$ .



# Fonction réciproque : schéma explicatif

$$f : I \rightarrow J$$

$$I \leftarrow J : g$$

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x)) = x \\ I \rightarrow J \rightarrow I \end{array} \right\} Id_I$$

$$f \circ g : \left\{ \begin{array}{l} x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x)) = x \\ J \rightarrow I \rightarrow J \end{array} \right\} Id_J$$

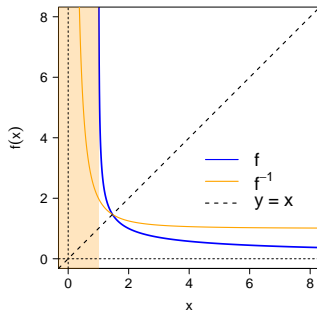
# Fonction réciproque : exemples

①  $f(x) = x^2$

②  $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}$

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$f^{-1} : y \mapsto 1 + \frac{1}{y^2}$$



# Fonctions logarithme et exponentielle

$$\ln : ]0; +\infty[ \rightarrow ]-\infty; +\infty[$$

$$x \mapsto \ln x$$

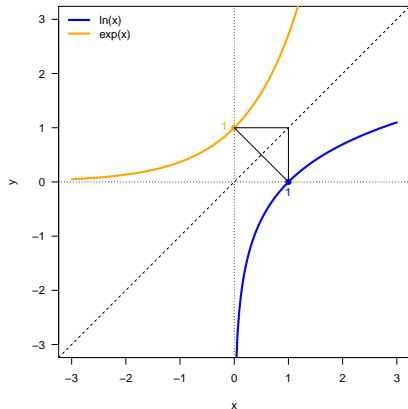
$$\ln 1 = 0$$

$$\exp : ]-\infty; +\infty[ \rightarrow ]0; +\infty[$$

$$x \mapsto e^x$$

$$e^0 = 1$$

$$\ln(e^x) = x = e^{\ln x}$$



# Plan détaillé

- 2 Généralités
  - Définitions
  - Opérations sur les fonctions
  - Parité, périodicité
  - Variations d'une fonction

# Parité : fonction paire

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.

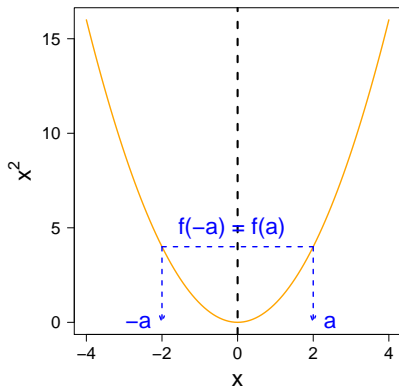
$f$  est **paire** si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$

Le graphe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

$D_f$  est symétrique par rapport à 0.

**Exemple** :  $f(x) = x^2$



# Parité : fonction impaire

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.

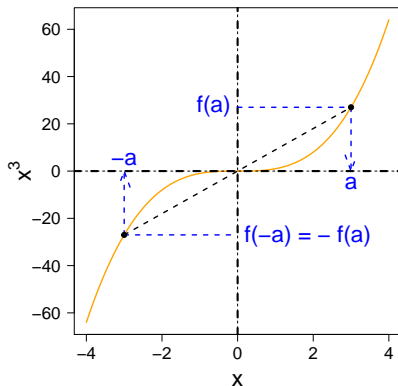
$f$  est **impaire** si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

Le graphe est **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

$D_f$  est symétrique par rapport à 0.

**Exemple** :  $f(x) = x^3$



## Périodicité

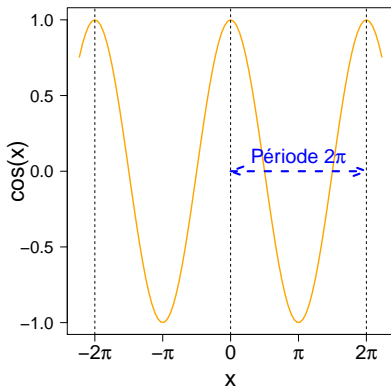
Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.

$f$  est **périodique de période  $p$**  si et seulement si

- $\forall x \in D_f, (x + p) \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(x + p) = f(x)$

**Exemple :**  $f(x) = \cos x$  est paire et périodique de période  $2\pi$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x$$



# Plan détaillé

- 2 Généralités
  - Définitions
  - Opérations sur les fonctions
  - Parité, périodicité
  - Variations d'une fonction



# Fonction croissante

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.

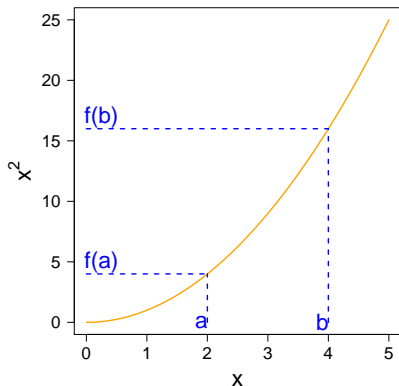
$f$  est **croissante** sur  $I \subset D_f$  si et seulement si

- $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b).$

$f$  est **strictement croissante** sur  $I \subset D_f$  si et seulement si

- $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b).$

**Exemple :**  $f(x) = x^2$  est strictement croissante sur  $[0, 5[$ .



# fonction décroissante

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle.  
 $f$  est **décroissante sur**  $I \subset D_f$  si

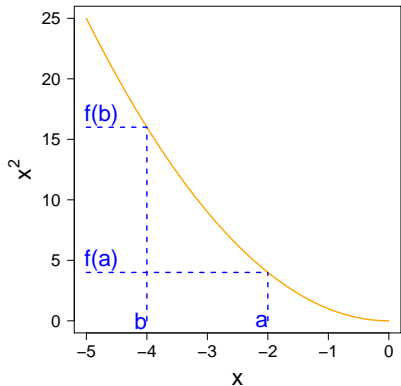
et seulement si

- $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow$   
 $f(a) \geq f(b).$

$f$  est **strictement décroissante sur**  
 $I \subset D_f$  si et seulement si

- $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Rightarrow$   
 $f(a) > f(b).$

**Exemple :**  $f(x) = x^2$  est  
 strictement décroissante sur  
 $[-5, 0[.$



# Taux d'accroissement

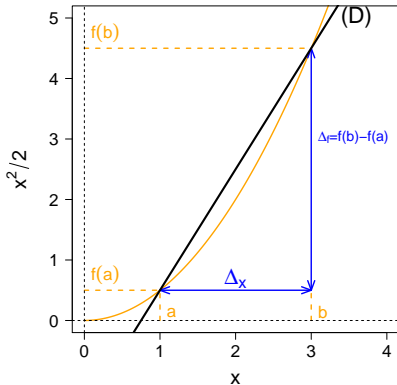
Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle. Soit  $(a, b) \in D_f^2, a < b$ .

Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $a$  et  $b$  est

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Exemple :** Le taux d'accroissement de  $f(x) = x^2$  entre 1 et 2 vaut 3.

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$



# Table des matières

1 Introduction

2 Généralités

3 Limites

4 Dérivation

# Plan détaillé

## 3 Limites

- Limites finies  $\ell$
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

## Limite finie en $a^-$ (en $a^+$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ , et  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $f$  admet une limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  à gauche en  $a$  si et seulement si

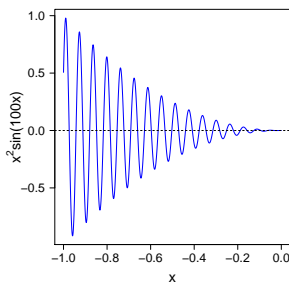
- $a \in D_f$  où  $a$  borne de  $D_f$ .
- Lorsque  $x \rightarrow a^-$ ,  $f(x) \rightarrow \ell$

Mathématiquement, ces conditions s'écrivent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \\ (x \in ]a - \delta, a[ \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon])$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \ell$ .

Par analogie, on a la limite en  $a^+$ .



**Ex :**  $f(x) = x^2 \sin(100x)$  sur  $[-1, 0]$  :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ .

# Limite finie en $a$

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ , et  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $f$  admet une limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $a$  si et seulement si :

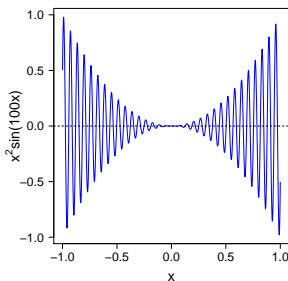
- Lorsque  $a \in D_f$ ,  

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) = \ell.$$
- Lorsque  $a \notin D_f$ ,  

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

On peut **prolonger  $f$  par continuité**  
 en écrivant  $f(a) = \ell$ .

On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ .



**Ex :**  $f(x) = x^2 \sin(100x)$  sur  $[-1, 1]$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

# Limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ .

$f$  admet une limite finie  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$  si et seulement si :

- Lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow \ell$

Mathématiquement, ceci s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R},$$

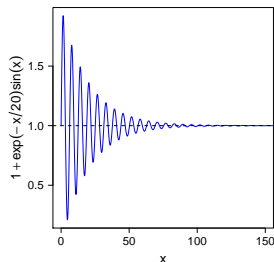
$$(x \in ]\alpha, +\infty[ \Rightarrow f(x) \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon])$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

On dit que la droite d'équation

$y = \ell$  est **asymptote horizontale**.

Ceci revient à  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \ell = 0$ .



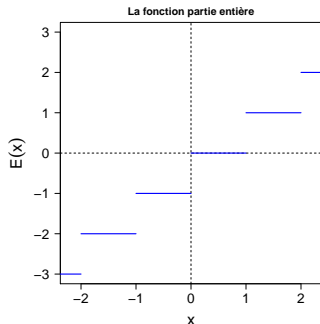
**Ex :**  $f(x) = 1 + e^{-\frac{x}{20}} \sin x$   
 sur  $[0, 150]$  :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ .



# Continuité

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ .

- $f$  est continue en  $a \in D_f$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- $f$  est continue sur  $I \subset D_f$  si et seulement si  $\forall a \in I, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .



**Exemple :**  $x \mapsto E(x)$  est continue sur les intervalles  $]n, n + 1[$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , mais discontinue pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

# Propriétés des fonctions continues

En général, prouver la continuité d'une fonction quelconque est complexe. La plupart du temps, on utilise les propriétés sur la continuité de fonctions usuelles dont on sait qu'elles sont continues.

- Somme de fonctions continues. **Exemple**  $x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$
- Produit de fonctions continues. **Exemple**  $x \mapsto \frac{1}{x} e^x$
- Quotient de fonctions continues. **Exemple**  $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Composition de fonctions continues. **Exemple**  $x \mapsto e^{\cos(x)}$

# Plan détaillé

## 3 Limites

- Limites finies  $\ell$
- **Limites infinies**
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

## Limite infinie en $a^-$ (en $a^+$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ , et  $a \in \mathbb{R}$ .  
 $f$  admet pour limite  $+\infty$  à gauche en  $a$  si et seulement si :

- Lorsque  $x \rightarrow a^-, f(x) \rightarrow +\infty$

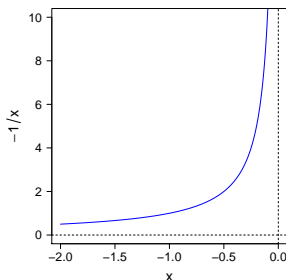
Mathématiquement, cette condition s'écrit :

$$\forall y > 0, \exists \delta > 0,$$

$$(x \in ]a - \delta, a[ \Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ .

On dit que la droite d'équation  $x = a$  est **asymptote verticale**.



**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty$ . L'axe vertical  $x = 0$  est asymptote

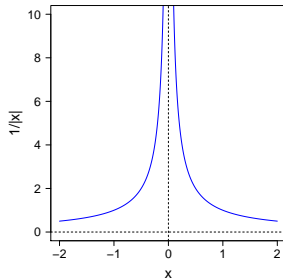
# Limite infinie en $a$

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$ , et  $a \in \mathbb{R}$ .

$f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $a$  si et seulement si :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .



$$\text{Ex : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

# Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur un domaine  $D_f \subset \mathbb{R}$

$f$  admet pour limite  $+\infty$  en  $+\infty$  si et seulement si :

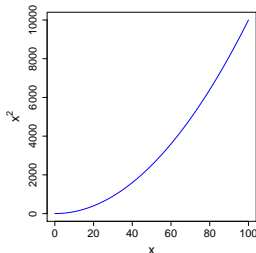
- $f(x) \rightarrow +\infty$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$

Mathématiquement, cette condition s'écrit :

$$\forall y > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R},$$

$$(x \in [x_0, +\infty[ \Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$$

On note alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .



**Ex :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

# Directions asymptotiques en $+\infty$ (ou $-\infty$ )

- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  alors  $f$  admet une **branche parabolique horizontale**. **Ex.** :  $\ln x$ ,  $\sqrt{x}$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  alors  $f$  admet une **branche parabolique verticale**. **Ex.** :  $e^x$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}^*$  alors on regarde  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \ell x$ .
  - Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \ell x = \pm\infty$ , alors  $f$  admet une **branche parabolique de pente  $\ell$** .
  - Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \ell x = m \in \mathbb{R}$ , alors  $f$  admet la droite  $y = \ell x + m$  comme **asymptote oblique**.  
Autrement dit,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (\ell x + m)] = 0$ .

# Directions asymptotiques en $+\infty$ (ou $-\infty$ )

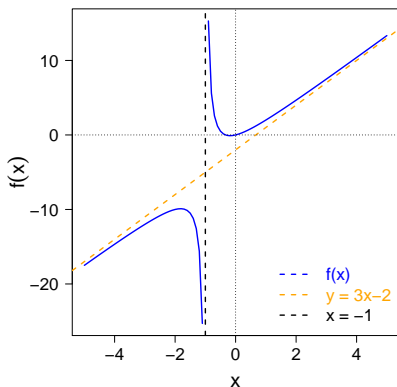
**Exemple :**  $f : x \mapsto \frac{3x^2+x}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - 3x = -2$$

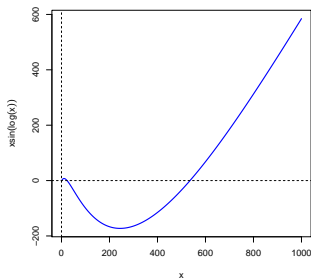


La droite d'équation  $y = 3x - 2$  est asymptote oblique au graphe de la fonction  $f$  en  $\pm\infty$ .

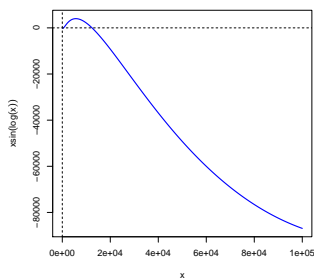


# Méfiez-vous de vos calculatrices

**Exemple :** La fonction  $x \mapsto x \sin(\ln(x))$   
n'admet pas de limite en  $+\infty$ .



sur l'intervalle  $[0; 10^3]$



sur l'intervalle  $[0; 10^5]$

# Plan détaillé

## 3 Limites

- Limites finies  $\ell$
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

## Opérations sur les limites et formes indéterminées

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x)$
$\lambda \neq 0$	$\mu \neq 0$	$\lambda + \mu$	$\lambda\mu$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\lim_{x \rightarrow \lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	0	$\lambda$	0	$\pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\lim_{x \rightarrow \lambda} g(x)$
0	$\mu \neq 0$	$\mu$	0	0	$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
0	0	0	0	<b>F.I.</b> $\frac{0}{0}$	$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	<b>F.I.</b> $0 \times \infty$	0	$\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$
$\pm\infty$	$\mu \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	<b>F.I.</b> $0 \times \infty$	<b>F.I.</b> $\frac{\pm\infty}{0}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	<b>F.I.</b> $\infty - \infty$	$\pm\infty$	<b>F.I.</b> $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)$

# Formes indéterminées (F.I.)

$$\frac{0}{0} \quad 0 \times \infty \quad \infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty}$$

# Exemple de la F.I. $\infty - \infty$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$   
et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ . On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ .

- Simplification possible
- Utilisation de la quantité conjuguée

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$ .

Exemple de la **F.I.**  $\infty - \infty$ 

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$   
 et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ . On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ .

- Simplification possible
- Utilisation de la quantité conjuguée

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$ .

Exemple de la **F.I.**  $\infty - \infty$ 

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$   
 et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ . On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ .

- Simplification possible
- Utilisation de la **quantité conjuguée**

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$ .

Exemple de la F.I.  $\infty - \infty$ 

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues telles que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ . On cherche  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$ .

- Simplification possible
- Utilisation de la quantité conjuguée

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$ .

$$\begin{aligned} x - 1 - \sqrt{x^2 - 1} &= \frac{(x - 1)^2 - \sqrt{x^2 - 1}^2}{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{-2x + 2}{x - 1 + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \frac{x}{x} \frac{-2 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1 \end{aligned}$$



# Plan détaillé

## 3 Limites

- Limites finies  $\ell$
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- **Limites connues**
- Limites par comparaison

# Polynômes en $\pm\infty$

En  $\pm\infty$ , les limites des polynômes sont celles du terme de degré le plus élevé.

## Exemples :

- $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 7x + 1$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^5 = -\infty.$
- $f(x) = -2x^6 - 4x^5 + 5x^2 + 100$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^6 = -\infty.$

# Fractions rationnelles en $\pm\infty$

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes  $N(x)$

et  $D(x) : f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$

Les limites en  $\pm\infty$  dépendent des degrés de  $N(x)$  et  $D(x)$ .

- $N$  est de plus haut degré que  $D \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$

**Exemple :**  $\frac{x^5 + 1}{x^4 + x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$

- $N$  est de plus petit degré que  $D \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0^\pm$

**Exemple :**  $\frac{x^4 + x}{x^5 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-$

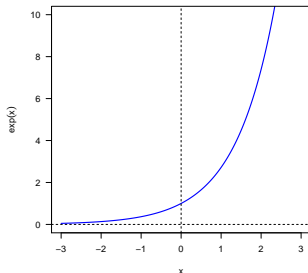
- $N$  et  $D$  sont de même degré  $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \ell$  où  $\ell$  est le rapport des coef. des termes de plus haut degré.

**Exemple :**  $\frac{4x^5 + x^4 + 3x^2}{-x^5 + 6x^2 + x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -4$

# Produits de fonctions exponentielles

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda e^{-x^\mu} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^\mu}}{x^\lambda} = +\infty$

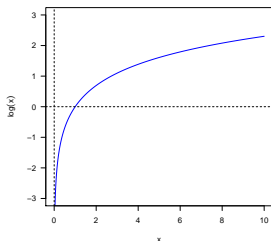


On dit que “c’est l’exponentielle qui l’emporte”.

# Produits de fonctions logarithmiques

On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\lambda \ln x^\mu = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^\mu}{x^\lambda} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\lambda}{\ln x^\mu} = +\infty$



On dit que “c’est le  $x^\lambda$  qui l’emporte”.

# Plan détaillé

## 3 Limites

- Limites finies  $\ell$
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

# Minoration / Majoration par une fonction qui $\rightarrow \pm\infty$

- S'il existe une fonction  $g$  et un réel  $A$  tel que  $\forall x \geq A, f(x) \geq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$
- S'il existe une fonction  $g$  et un réel  $A$  tel que  $\forall x \geq A, f(x) \leq g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ , alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

## Théorème “des gendarmes”

## Théorème

S'il existe deux fonctions  $g$  et  $h$ , et un réel  $A$  tel que  
 $\forall x \geq A, g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$ ,  
 alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ .

## Exemple

Quelle est la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f(x) = \frac{2x + \sin x}{x-1}$  définie sur  $]1; +\infty[$ ?



# Table des matières

1 Introduction

2 Généralités

3 Limites

4 Dérivation

# Plan détaillé

## 4 Dérivation

- Taux d'accroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Dérivée et variation
- Tableau de variations

# Dérivabilité

Soient  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ .

Le taux d'accroissement de  $f$  entre  $x$  et  $x + \varepsilon$  est

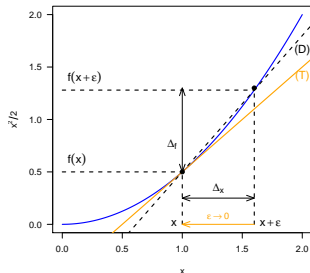
$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{x + \varepsilon - x}$$

Si  $\frac{\Delta_f}{\Delta_x} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \ell$ , alors  $\ell$  est appelé  
 “nombre dérivé de la fonction  $f$  en  $x$ ”. On note :

$$\ell = f'(x)$$

$f'(x)$  est la pente de la tangente (T) à la courbe de  $f(x)$  au point  $x$ .

On dit que  $f$  est **dérivable sur  $I$**  si  $\forall x \in I$  elle admet un  $f'(x)$ .



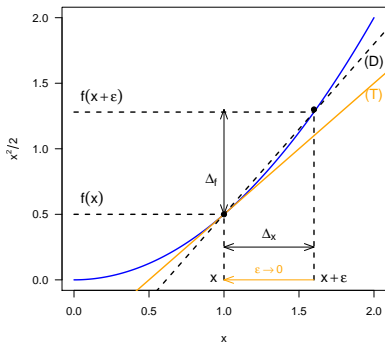
# Équation de la tangente

Soit  $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction réelle d'une variable réelle dérivable en  $x_0 \in D_f$ .

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction  $f$  en  $x_0$  est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0)$$

**Exemple :** La tangente à la courbe de  $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$  en  $x_0 = 1$  a pour équation  
 $y = \frac{1}{2} + 1 \times (x - 1) = x - \frac{1}{2}$ .



# Plan détaillé

## 4 Dérivation

- Taux d'accroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Dérivée et variation
- Tableau de variations

# Opérations sur les dérivées

$f$  et  $g$  sont deux fonctions continues et dérivables,  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

**Exemple :**  $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ .

# Plan détaillé

## 4 Dérivation

- Taux d'accroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Dérivée et variation
- Tableau de variations

# Dérivées usuelles

- $f(x) = k$  où  $k \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^a$  où  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $f'(x) = ax^{a-1}$

$$a = 1 \quad f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$a = -1 \quad f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$a = \frac{1}{2} \quad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$



# Dérivées usuelles

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

## Rappels :

- $e^{\ln(x)} = x$  et  $\ln(e^x) = x$  (fonctions réciproques).
- $\ln(a^x) = x \ln(a)$
- $a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \ln(a)}$
- $(e^{x \ln(a)})' = \ln(a) e^{x \ln(a)} = \ln(a) a^x$

# Dérivées usuelles pour fonctions composées

Rappels :

$$(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$$

Applications :

- $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$
- $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- $(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

# Plan détaillé

## 4 Dérivation

- Taux d'accroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Dérivée et variation
- Tableau de variations

## Variation

Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $I$ .

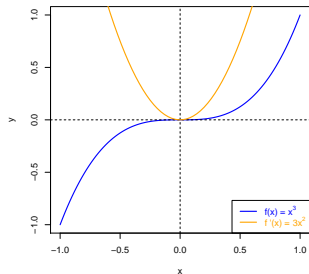
$$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$$



$f$  est croissante sur  $I$

**Exemple :**  $x \mapsto x^3$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\varepsilon + 3x\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - x^3}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\varepsilon + \varepsilon^2) \\ &= 3x^2 \geq 0 \end{aligned}$$



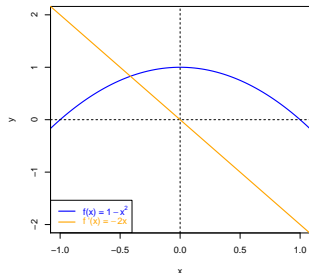
# Extremum local

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction continue dérivable sur un voisinage de  $a$ , telle que  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

Alors  $f$  possède un **extremum local** en  $a$ .

**Exemple :**

$$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$$



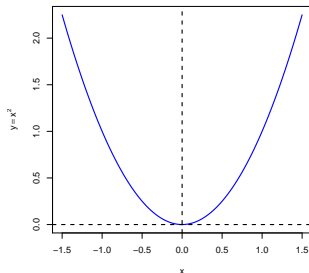
# Concavité / Convexité

Soit  $f$  une fonction dérivable **deux fois** sur  $I$ .

Si  $\forall x \in I, f''(x) > 0$ , alors la courbe représentative de  $f$  est convexe sur  $I$ .

**Exemple** :  $f : x \mapsto x^2$

Moyen mnémotechnique : **conVexe**.



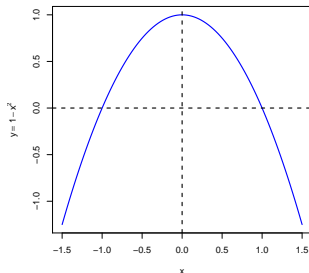
# Concavité / Convexité

Soit  $f$  une fonction dérivable **deux fois** sur  $I$ .

Si  $\forall x \in I, f''(x) < 0$ , alors la courbe représentative de  $f$  est concave sur  $I$ .

**Exemple** :  $f : x \mapsto 1 - x^2$

Moyen mnémotechnique : **concAve**.



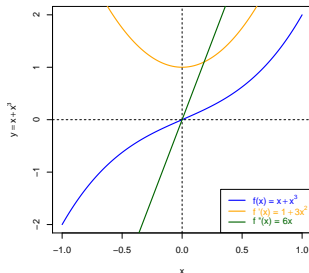
# Points d'inflexion

Soit  $f$  une fonction dérivable deux fois sur un voisinage de  $a \in \mathbb{R}$ .

Si  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$ , alors la courbe représentative de  $f$  présente un point d'inflexion en  $a$ .

**Exemple :**

$$f(x) = x + x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x$$





# Plan détaillé

## 4 Dérivation

- Taux d'accroissement local et dérivabilité
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Dérivée et variation
- Tableau de variations

# Exemple : énoncé

La concentration de dioxygène (en mg/L) dans l'eau d'un sac de transport de poissons vivants vérifie :

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t$$

pour  $t > 0$ .



## Exemple : dérivée - limites

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t \text{ avec } t > 0$$

$$C'(t) = 2e^{-t} - 0.1$$

$$C'(t) > 0 \Leftrightarrow -t > \ln \frac{0.1}{2} \Leftrightarrow t < \ln 20$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} -0.1t = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = -\infty$$

La fonction  $C(t)$  admet la droite  $y = -0.1t$  comme asymptote oblique en  $+\infty$ .

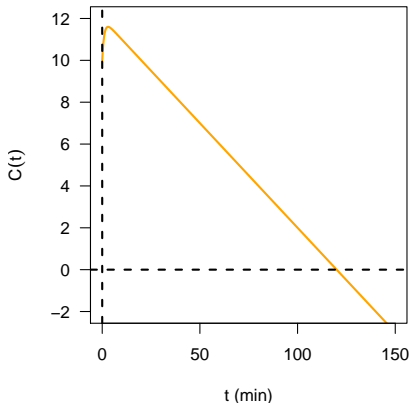
## Exemple : tableau de variation

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t \text{ avec } t > 0$$

$t$	0		$\ln 20$		$+\infty$
$C'(t)$		+	0	-	
			$\approx 11.6$		
$C(t)$		↗		↘	
	10				$-\infty$

# Exemple : représentation graphique

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t \text{ avec } t > 0$$



**Conclusions** : limites du modèle ?