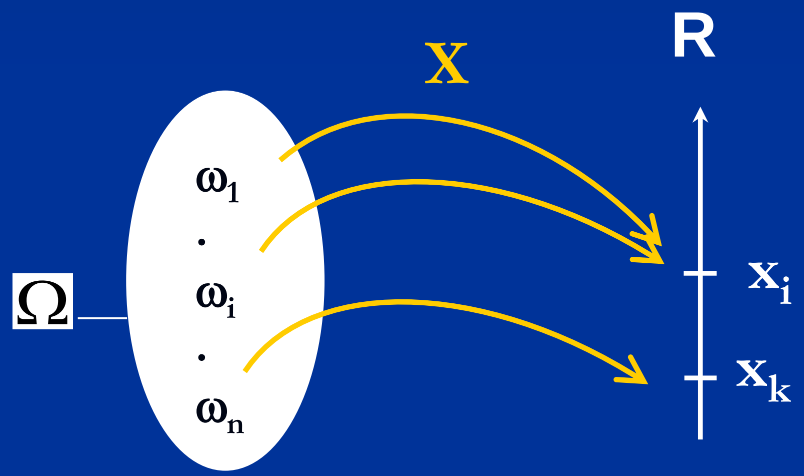
Chapitre 5

Variables aléatoires

Variable aléatoire

v.a. X est une application de Ω dans **R**



$$\Omega \rightarrow \mathbf{R}$$

$$\omega_i \rightarrow X(\omega_i) = x_i$$

x_i : observation de la variable aléatoire X

X sert à caractériser le résultat de l’expérience

Variable aléatoire

Deux types de variables aléatoires:

✓ **Variables aléatoires discrètes**

ne prennent que des valeurs discontinues dans un intervalle

Exemple : on lance une pièce deux fois

v.a. X: « nombre de faces obtenues »

$\Omega=\{FF, FP, PF, PP\}$

$X=\{0, 1, 2\}$

Variable aléatoire

✓ **Variables aléatoires continues**

peuvent prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné

Exemple: on considère l'ensemble Ω des étudiants de l'amphi

v.a. X : « taille des étudiants de l'amphi »

Ω: {ens. des étudiants de l'amphi}

X: {1,80; 1,76; 1,91; 1,69, … }

Variable aléatoire discrète

Loi de probabilité

$$\mathbb{R} \to [0,1]$$

$$x_i \to p(X = x_i) = p_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

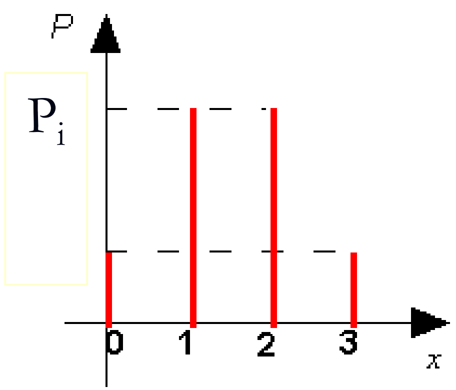
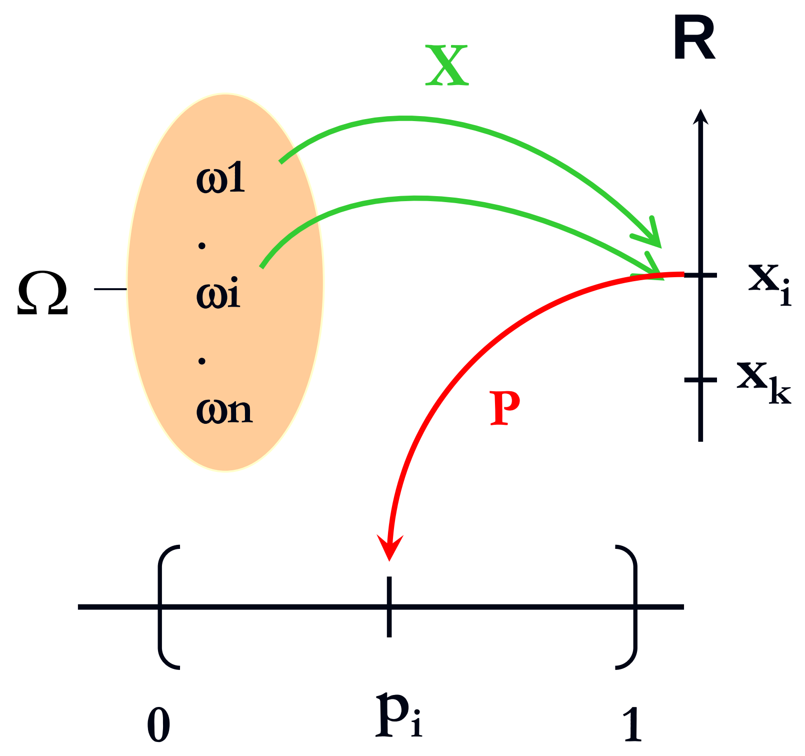


Diagramme en bâtons



Variable aléatoire discrète

Loi de probabilité

Exemple: lancé de la pièce deux fois

Ω	X	$p(X=x_i)$
FF	2	1/4
FP	1	1/2
PF		
PP	0	1/4

$p(F \cap F) = p(F) \times p(F) = 1/2 \times 1/2 = 1/4$

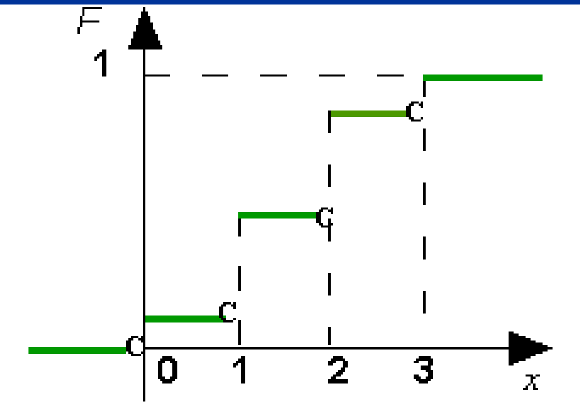
$p(X=1)=p(F \cap P) + p(P \cap F)= 1/4 + 1/4 = 1/2$

Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

$$R \to [0,1]$$

$$x_i \to F(x_i) = p(X < x_i)$$



Fonction de répartition

→ distribution des probabilités cumulées

Variable aléatoire discrète

Espérance: définition

Paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire
(équivalent de la moyenne statistique; centre de gravité des n points)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)x_i = \mu$$

Variable aléatoire discrète

Espérance: *Exemple*

espérance de X : « nb de faces après deux lancés »

E(X) = (2x0.25 + 1x0.5 + 0x0.25) = 1

→ 1 fois face en moyenne

Variable aléatoire discrète

Espérance: propriétés

X et Y, 2 variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(a + X) = a + E(X)$$

Soit $Z = X - E(X)$, $E(Z) = E[X - E(X)] = E(X) - E[E(X)] = E(X) - E(X) = 0$

→ une v.a. est dite centrée si son espérance est nulle

Variable aléatoire discrète

Variance: définition

Paramètre de dispersion qui correspond au moment d'ordre 2 de la variable aléatoire (variance statistique)

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)\left[x_i - E(X)\right]^2 = \sigma^2$$

$$V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

Variable aléatoire discrète

Variance: *Exemple*

variance du nombre de faces obtenues après deux lancés

$$V(X)= 0.25x[2-1]^2 + 0.5x[1-1]^2 + 0.25x[0-1]^2 = 0.5$$

ou

$$V(X) = [0.25x2^2 + 0.5x1^2 + 0.25x0^2] -1^2 = 0.5$$

Variable aléatoire discrète

Variance: propriétés

X et Y, 2 variables discrètes définies sur le même univers Ω

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y indépendantes

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X,Y)$ si X et Y non indépendantes

$V(aX) = a^2 V(X)$

$V(a + X) = V(X)$ car $V(a) = 0$

Soit $Z = X/\sqrt{V(X)}$, on montre que $V(Z)=1$

Une v.a. est dite réduite si sa variance est égale à 1

Variable aléatoire continue

Loi de probabilité

On ne peut mesurer que $\mathbf{p(a \leq X \leq b)}$ car $\mathbf{p(X=a)=0}$

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est dite **absolument continue**, s'il existe une **fonction f, appelée densité de probabilité** telle que :

$$\forall u \in R \quad p(X < u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx$$

On appelle **densité de probabilité** toute application continue

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow R^{+} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

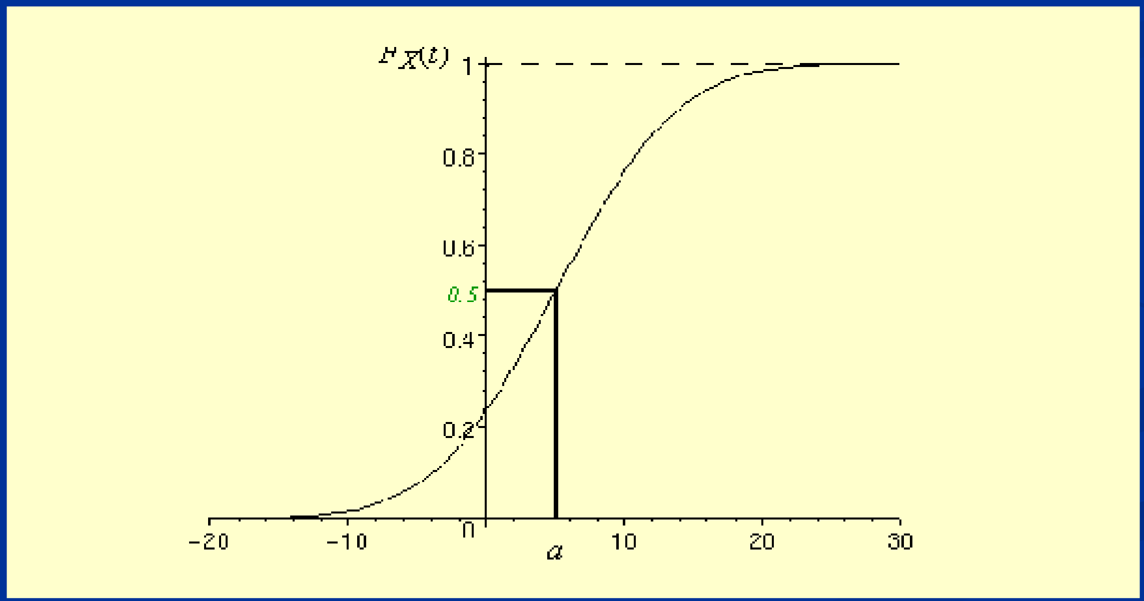
telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Variable aléatoire continue

Fonction de répartition

$$\forall u \in R \quad F(u) = p(X < u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx$$



Variable aléatoire continue

Fonction de répartition

$$\lim_{x \to -\infty} F(u) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} F(u) = 1$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(b) - 0 = p(X < b) = p(X \leq b)$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = p(X < b) - p(X < a) = p(a < X < b)$$

Variable aléatoire continue

Espérance

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$$

Variance

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[x - E(X)\right]^2 dx = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

Il faut que l'intégrale soit convergente