

Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$

Automne 2013

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
- 3 Principes de l'analyse qualitative
- 4 Exemples de modèles classiques
- 5 Conclusions
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Les modèles linéaires

- Modèles les plus simples
- Une analyse quantitative complète est possible
- Une analyse qualitative permet de décrire le comportement du modèle.

Plan détaillé

1 L'analyse des modèles linéaires

- Le modèle de Malthus
- Un modèle de diffusion

Le modèle de Malthus (ou modèle exponentiel)

Le modèle de Malthus est l'un des premiers modèles de dynamique des populations. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- On considère une population de taille $N(t)$.
- L'accroissement individuel de la population est constant quel que soit $N(t)$.

Comment la taille de la population évolue-t-elle au cours du temps.

Les variables et les paramètres du modèle

Les variables

$N(t)$ est la taille de la population.

Les paramètres

r est le “taux de croissance” intrinsèque de la population.

Les équations du modèle

L'évolution la taille de la population vérifie :

$$dN = rNdt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN$$

Les solutions

On résoud l'équation différentielle $\frac{dN}{dt} = rN$.

$$\frac{dN}{dt} = rN$$

$$\iff \frac{dN}{N} = r dt$$

$$\Rightarrow \ln(N) = rt + C$$

$$\iff N = e^C e^{rt}$$

$$\Rightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$$

Plan détaillé

1 L'analyse des modèles linéaires

- Le modèle de Malthus
- Un modèle de diffusion

Diffusion d'un soluté à travers une membrane.

On réalise le modèle expérimental suivant :

- De l'eau pure dans un récipient.
- Un boudin à dialyse contenant une solution d'un colorant est plongé dans le récipient.

Comment la concentration en colorant évolue-t-elle dans le récipient ?

Les variables et les paramètres du modèle

Les variables varient au cours du temps.

Les variables

- La concentration $c_r(t)$ dans le récipient.
- La concentration $c_b(t)$ dans le boudin à dialyse.

Les variables et les paramètres du modèle

Les paramètres sont fixés pour une expérience donnée

Les paramètres peuvent éventuellement varier d'une expérience à l'autre.

Les paramètres

- La concentration initiale de la solution c_0 .
- Le volume de l'eau dans le récipient V_r .
- Le volume de la solution dans le boudin à dialyse V_b .
- La perméabilité de la membrane de dialyse au colorant P .
- La surface de la membrane constituant le boudin à dialyse S .

Les équations du modèle

Pour simplifier, on considèrera $V_r = V_b = V$.

La conservation de la quantité de colorant impose

$$c_r V_r + c_b V_b = c_0 V_b \iff c_r + c_b = c_0 \iff c_b = c_0 - c_r$$

La variation de la concentration c_r dans le récipient est proportionnelle à :

- la perméabilité de la membrane P (donnée par unité de surface)
- la surface d'échange S
- la différence des concentrations $\Delta c = c_b - c_r = c_0 - 2c_r$

Les équations du modèle

L'évolution de la concentration c_r vérifie donc l'équation :

$$dc_r = (PS\Delta c)dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dc_r}{dt} = PS(c_0 - 2c_r)$$

Les solutions

L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{dc_r}{dt} = PS(c_0 - 2c_r) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = PS c_0. \quad (1)$$

L'équation différentielle sans second membre est

$$\frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = 0. \quad (2)$$

Les solutions de l'équation 1 sont du type

$c_r(t) = c_{\text{essm}}(t) + c_{\text{part}}(t)$, où $c_{\text{essm}}(t)$ est une solution de l'équation sans second membre (2) et $c_{\text{part}}(t)$ est une solution particulière de l'équation (1).

Solution particulière de (1)

$$\frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = PSc_0.$$

$c_{\text{part}}(t) = \frac{c_0}{2}$ est une solution particulière évidente de (1).

Solution générale de (2)

$$\begin{aligned}\frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r &= 0 \\ \Longleftrightarrow \frac{dc_r}{dt} &= -2PSc_r \\ \Longleftrightarrow \frac{dc_r}{c_r} &= -2PSdt \\ \Longleftrightarrow \int \frac{dc_r}{c_r} &= \int -2PSdt \\ \Longleftrightarrow \ln c_r &= -2PSt + K \\ \Longleftrightarrow c_r(t) &= Ce^{-2PSt}.\end{aligned}$$

$c_{\text{essm}}(t) = Ce^{-2PSt}$ est une solution générale de (2).

Solution du modèle

La solution générale du modèle est du type :

$$c_r(t) = \frac{c_0}{2} + Ce^{-2PSt}.$$

On cherche la solution remplissant la condition initiale $c_r(0) = 0$,
donc $C = -\frac{c_0}{2}$.

$$c_r(t) = \frac{c_0}{2} (1 - e^{-2PSt}).$$

Représentation graphique des solutions : Chroniques

La concentration évolue vers une concentration limite

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c_r(t) = \frac{c_0}{2}.$$

$$\dot{c} = PS(c_0 - 2c)$$

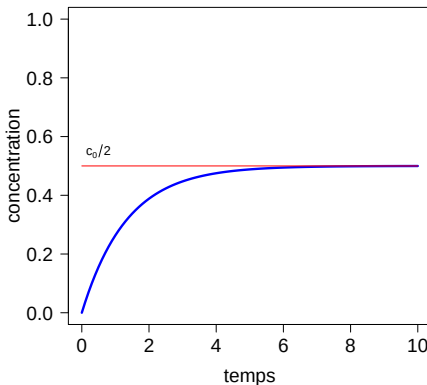


Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique**
- 3 Principes de l'analyse qualitative
- 4 Exemples de modèles classiques
- 5 Conclusions
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Plan détaillé

- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
 - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
 - Analyse quantitative du modèle logistique
 - Points singuliers
 - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
 - Tracé des chroniques, points d'inflexion

Le modèle de Verhulst ou modèle logistique

Le modèle de dynamique des populations de Malthus est insatisfaisant car :

- la croissance de la population ne dépend pas de sa taille
- il fait l'hypothèse de ressources illimitées
- il mène à l'extinction de la population ou à une explosion démographique.

Dans le modèle de Malthus, on a $r = b - d$ où b est le taux de fécondité et d le taux de mortalité par individu.

Les équations du modèle

Les hypothèses du modèle :

- Le taux de fécondité par individu est constant : $b = b_0$.
- Le taux de mortalité par individu croît avec l'effectif :

$$d = d_0 + \delta N.$$

Le taux de croissance intrinsèque de la population est

$r = b - d = b_0 - d_0 - \delta N$. La variation de l'effectif dN durant la différentielle de temps dt est donc :

$$dN = (b_0 - d_0 - \delta N)Ndt$$

Les équations du modèle

$$dN = (b_0 - d_0 - \delta N)Ndt$$

$$\iff \frac{dN}{dt} = ((b_0 - d_0)N - \delta N^2)$$

$$\iff \frac{dN}{dt} = (b_0 - d_0)N \left(1 - \frac{\delta N}{b_0 - d_0}\right)$$

$$\iff \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right), \quad (3)$$

avec $r = b_0 - d_0$ et $K = \frac{r}{\delta}$.

Plan détaillé

- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
 - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
 - Analyse quantitative du modèle logistique
 - Points singuliers
 - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
 - Tracé des chroniques, points d'inflexion

Analyse quantitative du modèle logistique

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$\iff \frac{dN}{N \left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r dt$$

$$\iff \frac{K}{N (K - N)} dN = r dt$$

$$\iff \frac{K - N + N}{N (K - N)} dN = r dt$$

$$\iff \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = r dt$$

Analyse quantitative du modèle logistique

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = rdt \\ \Leftrightarrow & \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{K - N} \right) dN = \int rdt \\ \Leftrightarrow & \ln N - \ln(K - N) = rt + C_1 \\ \Leftrightarrow & \ln \left(\frac{N}{K - N} \right) = rt + C_1 \\ \Leftrightarrow & \frac{N}{K - N} = C_2 e^{rt} \end{aligned}$$

Analyse quantitative du modèle logistique

$$\begin{aligned}
 & \frac{N}{K - N} &= C_2 e^{rt} \\
 \iff & \frac{N}{N} &= C_2 K e^{rt} - N C_2 e^{rt} \\
 \iff & N (1 + C_2 e^{rt}) &= C_2 K e^{rt} \\
 \iff & N &= \frac{C_2 K e^{rt}}{1 + C_2 e^{rt}} \\
 \iff & N &= \frac{K C_2}{C_2 + e^{-rt}}
 \end{aligned}$$

Analyse quantitative du modèle logistique

Au temps $t = 0$, l'effectif de la population est N_0

$$\begin{aligned}
 N(t) &= \frac{KC_2}{C_2 + e^{-rt}} \\
 \Leftrightarrow N_0 &= \frac{KC_2}{C_2 + 1} \\
 \Leftrightarrow N_0(C_2 + 1) &= KC_2 \\
 \Leftrightarrow C_2(N_0 - K) &= -N_0 \\
 \Leftrightarrow C_2 &= \frac{N_0}{K - N_0}
 \end{aligned}$$

Analyse quantitative du modèle logistique

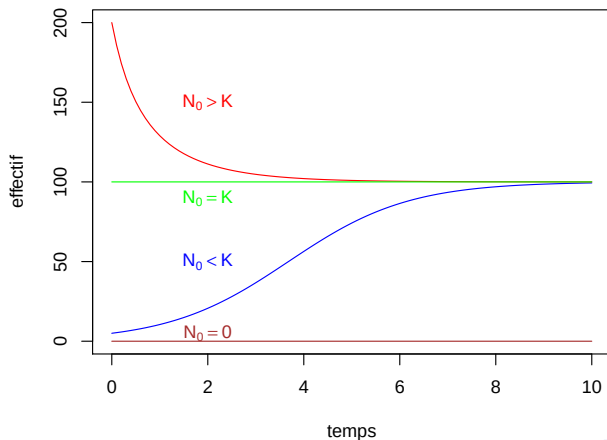
Les solutions de l'équation 3 sont donc du type :

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}. \quad (4)$$

Quatre cas possibles :

- Si $N_0 = 0$, alors $\forall t, N(t) = 0$.
- Si $K > N_0 > 0$, alors $\forall t, \dot{N} > 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$.
- Si $N_0 = K$, alors $\forall t, N(t) = N_0$.
- Si $N_0 > K$, alors $\forall t, \dot{N} < 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$.

Représentation graphique des solutions (chroniques)



Propriétés du système

Plutôt que l'étude quantitative détaillée du système, il serait intéressant d'étudier simplement ses propriétés :

- Existe-t-il des points invariants ?
- Comment le système évolue-t-il ailleurs qu'en ces points invariants ?
- Quelle est la forme des chroniques ?

Plan détaillé

- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
 - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
 - Analyse quantitative du modèle logistique
 - Points singuliers
 - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
 - Tracé des chroniques, points d'inflexion

Les points singuliers ou points d'équilibre

Le cas du modèle logistique

Un point d'équilibre N^* du modèle est tel qu'à ce point N n'évolue plus, c'est à dire $\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=N^*} = 0$.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=N^*} = 0 \iff rN^* \left(1 - \frac{N^*}{K} \right) = 0$$

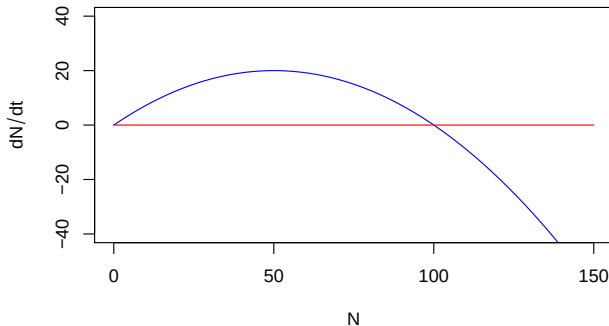
Il existe deux points d'équilibre, $N_0^* = 0$ et $N_1^* = K$.

N va-t-il tendre à se rapprocher de ces points d'équilibre ou bien à s'en éloigner ?

L'évolution du système entre les points singuliers

Le cas du modèle logistique

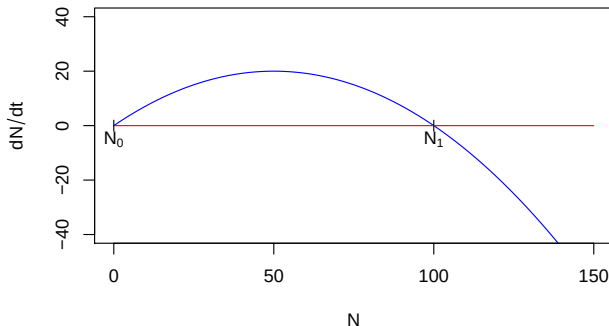
Pour savoir si N croît ou décroît, on étudie le signe de $\dot{N}$



L'évolution du système entre les points singuliers

Le cas du modèle logistique

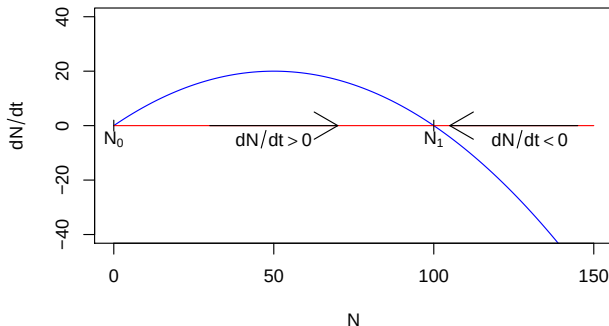
Aux points d'équilibre N_0^* et N_1^* , $\frac{dN}{dt} = 0$.



L'évolution du système entre les points singuliers

Le cas du modèle logistique

Ailleurs, le signe de $\frac{dN}{dt}$ indique le sens d'évolution de N .



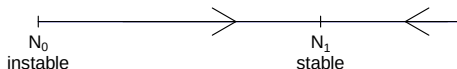
Plan détaillé

- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
 - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
 - Analyse quantitative du modèle logistique
 - Points singuliers
 - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
 - Tracé des chroniques, points d'inflexion

Portrait de phase du système

Le cas du modèle logistique

Le portrait de phase d'un système dynamique indique les points singuliers du système et le sens de variation de la variable étudiée de part et d'autre des points d'équilibre.



Plan détaillé

- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
 - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
 - Analyse quantitative du modèle logistique
 - Points singuliers
 - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
 - Tracé des chroniques, points d'inflexion

Les chroniques

Le cas du modèle logistique

Les chroniques d'un système sont la représentation graphique des solutions. Elles ont les propriétés suivantes :

- Les chroniques ne sont jamais sécantes (par un point (N, t) il ne passe qu'une seule chronique).
- Au voisinage des points d'équilibre, les pentes des chroniques tendent à devenir nulles (horizontales).
- La chronique passant par le point $(N, t + \lambda)$ s'obtient par translation de la chronique passant par le point (N, t) .

Les chroniques

Le cas du modèle logistique

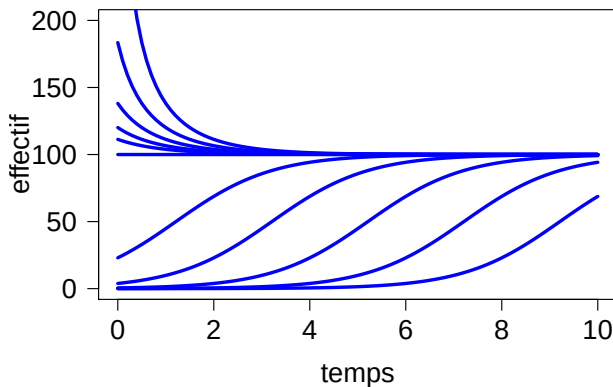


Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
- 3 Principes de l'analyse qualitative**
- 4 Exemples de modèles classiques
- 5 Conclusions
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Analyse qualitative d'un modèle quelconque dans $\mathbb{R}$

Comme nous l'avons vu pour le modèle logistique, il est possible d'effectuer une analyse qualitative d'un modèle lorsque celui-ci est trop complexes.

Analyse quantitative

- Recherche de solutions exactes.
- Étude des fonctions solutions.

Analyse qualitative

- Étude des propriétés des solutions.
- Étude des tendances (points d'équilibre, stabilité. . .)

Plan détaillé

3 Principes de l'analyse qualitative

- Les points singuliers ou points d'équilibre
- Stabilité des points d'équilibre et linéarisation
- Les points d'inflexion

Points singuliers

Les points singuliers (ou points d'équilibre) notés x^* d'un système quelconque du type $\dot{x} = f(x)$ satisfont :

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^*) = 0.$$

Rechercher les points d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$ revient donc à trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Un système peut n'avoir aucun point d'équilibre, un nombre fini ou un nombre infini de points d'équilibres.

Plan détaillé

3 Principes de l'analyse qualitative

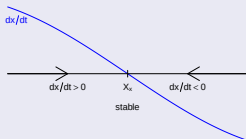
- Les points singuliers ou points d'équilibre
- Stabilité des points d'équilibre et linéarisation
- Les points d'inflexion

Stabilité des points d'équilibre

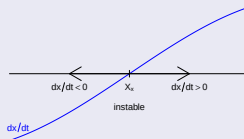
Si dans un système quelconque $\dot{x} = f(x)$, la fonction f est continue, alors il suffit d'étudier le signe de f au voisinage des points d'équilibre pour connaître leur stabilité.

Il existe 4 cas possibles.

x^* stable



x^* instable

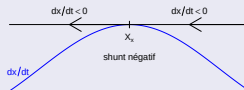


Stabilité des points d'équilibre

x^* shunt positif



x^* shunt négatif



Stabilité des points d'équilibre

Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

On utilise un développement de Taylor d'ordre 1 pour linéariser $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre x^* .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &\approx \underbrace{f(x^*)}_{=0} + \underbrace{(x - x^*)f'(x^*)}_{(x - x^*) \frac{d\dot{x}}{dx} \Big|_{x=x^*}} \\ &\approx 0 + (x - x^*) \frac{d\dot{x}}{dx} \Big|_{x=x^*}\end{aligned}$$

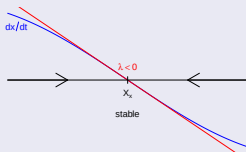
La stabilité de x^* dépend du signe de $\lambda = \frac{d\dot{x}}{dx} \Big|_{x=x^*}$

Stabilité des points d'équilibre

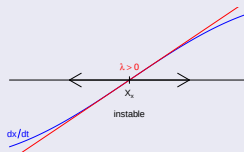
Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

$\lambda = \left. \frac{d\dot{x}}{dx} \right|_{x=x^*}$ est la pente de la tangente à la courbe
représentative de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ au point $x = x^*$.

$\lambda < 0 \Rightarrow x^*$ stable



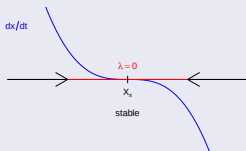
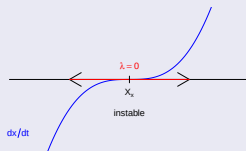
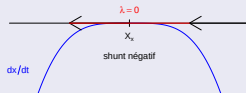
$\lambda > 0 \Rightarrow x^*$ instable



Stabilité des points d'équilibre

Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

$\lambda = 0 \Rightarrow$ on ne peut pas conclure



Plan détaillé

3 Principes de l'analyse qualitative

- Les points singuliers ou points d'équilibre
- Stabilité des points d'équilibre et linéarisation
- Les points d'inflexion

Points d'inflexion

Les points d'inflexion des chroniques d'un système dynamique de type $\dot{x} = f(x)$ sont les points pour lesquels.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \neq 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = f'(x) = 0$$

Points d'inflexion

Les points d'inflexion des chroniques d'un système dynamique de type $\dot{x} = f(x)$ sont les points différents des points singuliers qui s'obtiennent en résolvant l'équation

$$\left. \frac{d\dot{x}}{dx} \right|_{x=x_{\text{infl}}} = f'(x_{\text{infl}}) = 0.$$

Points d'inflexion

Exemple du modèle logistique

L'équation (3) du modèle de Verhulst vu précédemment est :

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN - \frac{rN^2}{K}$$

Il existe deux points d'équilibre, $N_0^* = 0$ et $N_1^* = K$.

Les points d'inflexion des chroniques vérifient

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = 0 \iff r - \frac{2rN}{K} = 0 \iff N = \frac{K}{2}$$

Points d'inflexion

Exemple du modèle logistique

Les chroniques du modèle logistique présentent donc un point d'inflexion pour $N = \frac{K}{2}$.

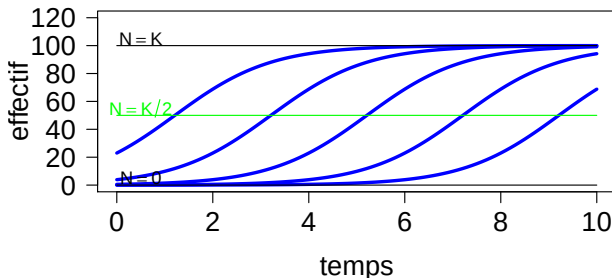


Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
- 3 Principes de l'analyse qualitative
- 4 Exemples de modèles classiques**
- 5 Conclusions
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
 - Les modèles de populations exploitées
 - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
 - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
 - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
 - Prédation de type II

Le modèle de Gompertz

Un concurrent du modèle logistique

Le modèle de Gompertz est un modèle de dynamique des populations. Son équation est la suivante :

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln N,$$

où $r > 0$.

Le modèle de Gompertz

Points d'équilibre

Les points d'équilibre vérifient $\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=N^*} = 0$

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln N = 0 \iff \begin{cases} N = N_0^* = 0 \\ N = N_1^* = 1 \end{cases}$$

Le modèle de Gompertz

Stabilité des points d'équilibre : linéarisation

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -rN \frac{1}{N} - r \ln N = -r(1 + \ln N)$$

- $\left. \frac{d\dot{N}}{dN} \right|_{N=0}$ n'est pas défini, mais $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left. \frac{d\dot{N}}{dN} \right|_{N=\epsilon} = +\infty$, donc $N_0^* = 0$ est instable.
- $\left. \frac{d\dot{N}}{dN} \right|_{N=1} = -r < 0$ donc $N_1^* = 1$ est stable.

Le modèle de Gompertz

Points d'inflexion

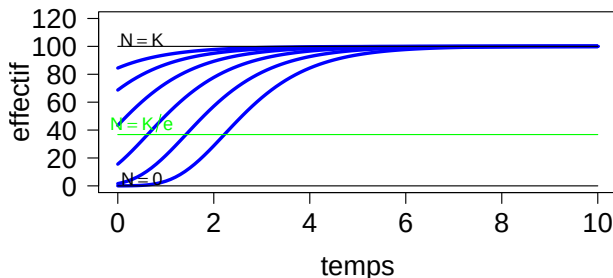
$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -rN \frac{1}{N} - r \ln N = -r(1 + \ln N) = 0 \iff N = e^{-1}$$

Les chroniques des solutions du modèle de Gompertz présentent donc un point d'inflexion pour $N = e^{-1}$.

Le modèle de Gompertz

Chroniques

Un changement d'échelle peut permettre d'adapter le modèle de Gompertz pour obtenir une capacité limite de K individus et un point d'inflexion pour $N = \frac{K}{e}$.



Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
 - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
 - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
 - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
 - Prédation de type II

Les modèles de populations exploitées

Les modèles de populations exploitées sont utilisés pour leur intérêt commercial ou écologique. De nombreux modèles ont été proposés, ils sont toujours composés :

- d'un type de croissance (Logistique, Gompertz. . .)
- d'un type de prédation (constant, linéaire, non linéaire. . .)

Dans le cadre de ce cours nous verrons quatre modèles de populations exploitées. Pour chaque modèle, la croissance de la population sera de type logistique.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$

L'exploitation d'une population

L'exploitation d'une population consiste à prélever des individus dans cette population. Ce prélèvement peut-être

- Constant
- Proportionnel à la taille de la population
- non linéaire et croissant avec le taille de la population

Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
- Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
- Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
- Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
- Prédation de type II

Pêche avec quota

Equation du modèle

Il s'agit du modèle le plus simple d'exploitation, où la quantité d'individus prélevés par unité de temps est constante Q (quota).

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - Q$$

Pêche avec quota

Points d'équilibre

On résoud $\frac{dN}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q = 0 \\ \iff -\frac{r}{K}N^2 + rN - Q &= 0\end{aligned}$$

Il existe 3 cas possibles selon le signe de $\Delta = r^2 - 4\frac{rQ}{K}$

Pêche avec quota

Points d'équilibre

$$\Delta = r^2 - 4\frac{rQ}{K} = r \left(r - \frac{4Q}{K} \right)$$

- $r - \frac{4Q}{K} > 0 \iff Q < \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ il existe 2 points d'équilibre.
- $r - \frac{4Q}{K} = 0 \iff Q = \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ il existe 1 point d'équilibre.
- $r - \frac{4Q}{K} < 0 \iff Q > \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ il n'existe pas de point d'équilibre.

Pêche avec quota

Points d'équilibre, $Q < \frac{rK}{4}$

Dans le cas $\Delta > 0$, les points d'équilibre sont :

- $N_0^* = K \frac{r - \sqrt{r^2 - 4\frac{rQ}{K}}}{2r} > 0$
- $N_1^* = K \frac{r + \sqrt{r^2 - 4\frac{rQ}{K}}}{2r} > 0$

Avec $0 < N_0^* < \frac{K}{2} < N_1^* < K$.

Pêche avec quota

$$\text{Points d'équilibre, } Q = \frac{rK}{4}$$

Dans le cas $\Delta = 0$, le seul point d'équilibre est :

$$N^{\star} = \frac{K}{2}$$

Pêche avec quota

$$Q > \frac{rK}{4}$$

Dans le cas $\Delta > 0$, il n'y a pas de point d'équilibre et

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - Q < 0.$$

Le modèle prédit que la taille de la population décroît sans cesse.
Peut-on trouver une méthode *simple* expliquant ces résultats ?

L'exploitation d'une population

Qu'est-ce qu'un point d'équilibre ?

L'exploitation d'une population consiste à prélever des individus dans cette population. Ce prélèvement peut-être

- Constant
- Proportionnel à la taille de la population
- non linéaire et croissant avec le taille de la population

Un éventuel état d'équilibre est atteint lorsque la croissance naturelle de la population compense exactement le prélèvement sur celle-ci.

La croissance logistique

On s'intéresse à la fonction $\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN - r\frac{N^2}{K}$.

- Racines (points d'équilibre du modèle logistique)
- Tangentes aux points d'équilibre
- Extremums (points d'inflexion des chroniques)

La croissance logistique

Points d'équilibre

$$\dot{N} = 0 \iff rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN - r\frac{N^2}{K} = 0$$

Deux points d'équilibre :

- $N_0^* = 0$
- $N_1^* = K$

La croissance logistique

Extremum

$$\frac{dN}{dt} = 0 \iff r - 2r\frac{N}{K} = 0 \iff N = \frac{K}{2}$$

$\frac{dN}{dt}$ admet un maximum local pour $N = \frac{K}{2}$, qui vaut :

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=\frac{K}{2}} = r\frac{K}{2} \left(1 - \frac{K}{2K} \right) = \frac{rK}{4}$$

La croissance logistique

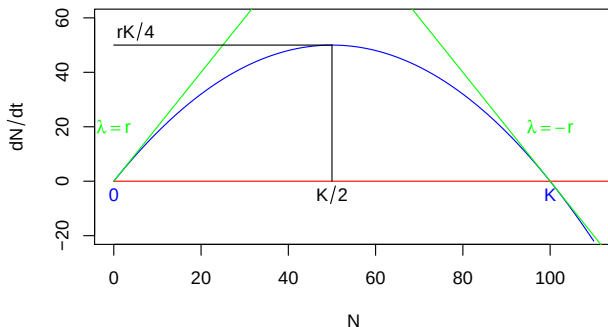
Tangentes aux points d'équilibre

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=0} = r$$

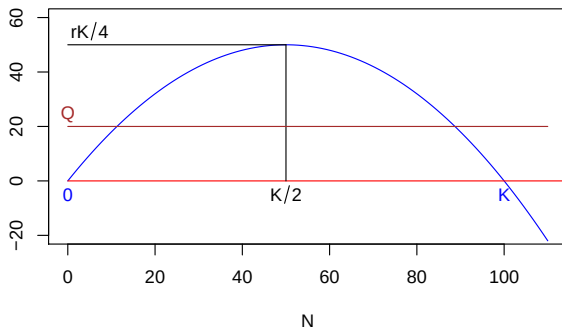
$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{N=K} = r - 2r \frac{K}{K} = -r$$

Les pentes des tangentes aux points d'équilibre sont respectivement r et $-r$.

La croissance logistique

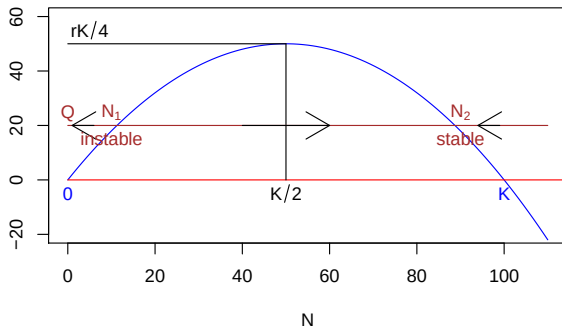


Pêche avec quota



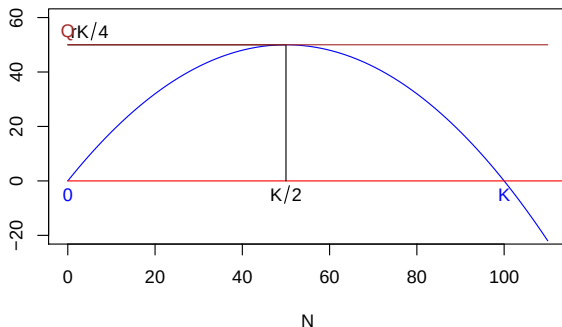
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q < \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota



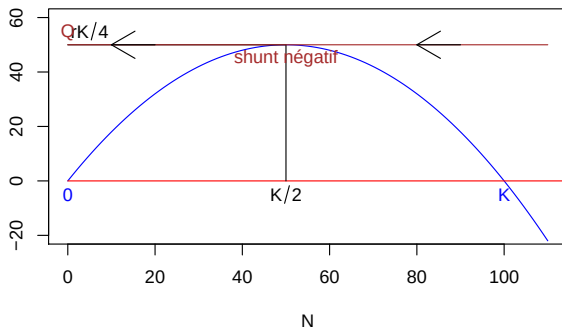
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - Q, \quad Q < \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota



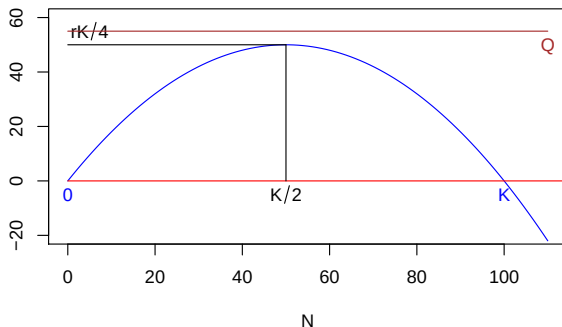
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q = \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota



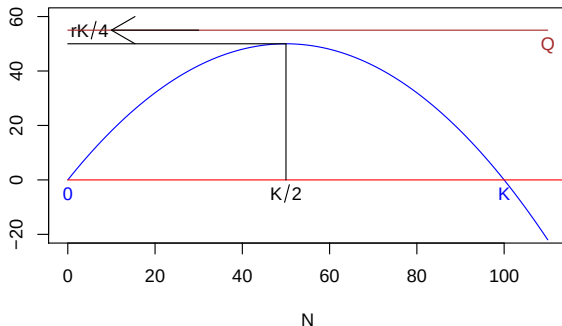
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q = \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota



$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - Q, \quad Q > \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota

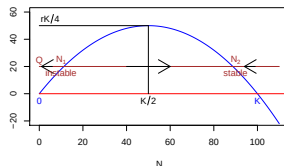


$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - Q, \quad Q > \frac{rK}{4}$$

Pêche avec quota

Conclusions

- Dans le meilleur des cas, 2 états d'équilibre.
- 1 état instable / 1 état stable.
- L'augmentation du quota rapproche les deux états.
- On ne peut pas pêcher avec $Q \geq \frac{rK}{4}$.



Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
- Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
- **Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant**
- Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
- Prédation de type II

Pêche à effort constant

Equation du modèle

Ici, l'effort de pêche E est constant, c'est à dire que la quantité d'individus prélevés par unité de temps est proportionnelle à la taille de la population EN .

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN$$

Pêche à effort constant

Points d'équilibre

On résoud $\frac{dN}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN = 0 \\ \iff N \left(r \left(1 - \frac{N}{K}\right) - E\right) &= 0\end{aligned}$$

Il existe deux points d'équilibre : $N_0^* = 0$ et $N_1^* = K \frac{r - E}{r}$
 N_1^* n'a de sens biologique que si $N_1^* > 0$, c'est à dire $r > E$

Pêche à effort constant

Optimum de l'effort de pêche, $E < r$

Dans le cas où N_1^* existe, on peut chercher un optimum de l'effort de pêche permettant d'obtenir le prélèvement le plus élevé possible. La quantité pêchée au point d'équilibre N_1^* est :

$$EN_1^* = EK \frac{r - E}{r} = KE - K \frac{E^2}{r}$$

Pêche à effort constant

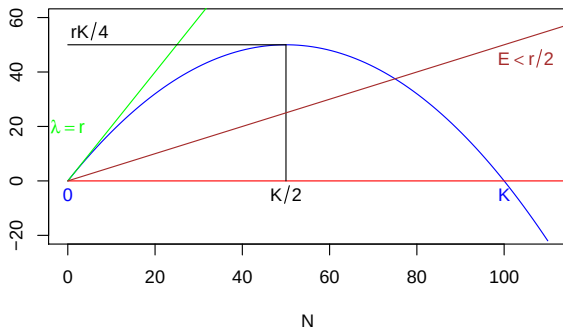
L'optimum de l'effort de pêche E^* est tel que EN_1^* est maximum pour $E = E^*$, soit

$$\begin{aligned} \left. \frac{dEN^*}{dE} \right|_{E=E^*} &= K - 2\frac{KE^*}{r} = 0 \\ \iff E^* &= \frac{rK}{2K} \\ \iff E^* &= \frac{r}{2} \end{aligned}$$

À l'effort de pêche optimum, la population est maintenue à une taille $N_{\text{opt}}^* = K \frac{r-E^*}{r} = \frac{K}{2}$, et la quantité d'individus prélevés est

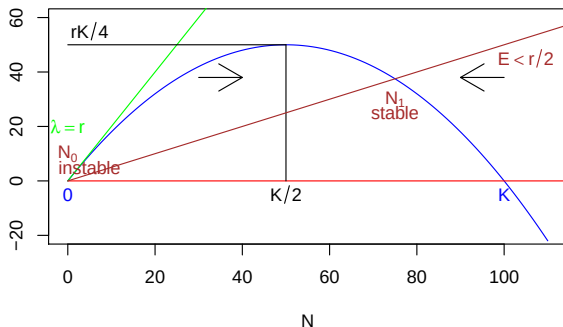
$$N_{\text{opt}}^* E^* = \frac{rK}{4}$$

Pêche à effort constant



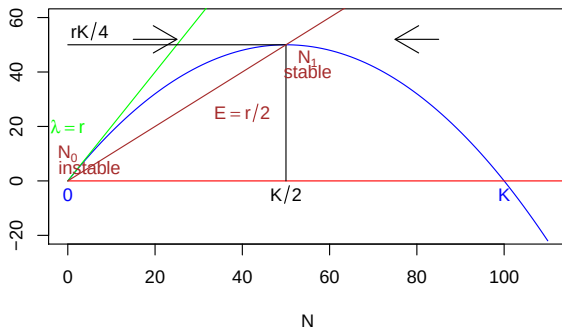
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN, E < \frac{r}{2}$$

Pêche à effort constant



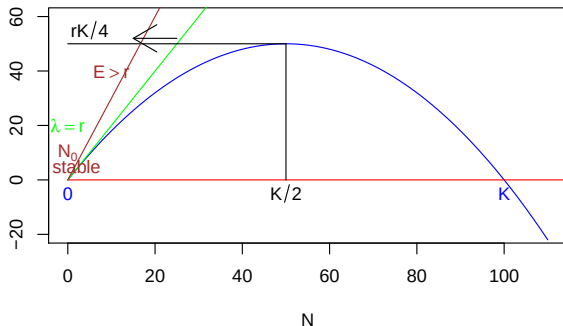
$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN, E < \frac{r}{2}$$

Pêche à effort constant



$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN, E = \frac{r}{2}$$

Pêche à effort constant

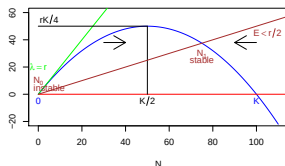


$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - EN, E > r$$

Pêche à effort constant

Conclusions

- 2 états d'équilibre tant que $E < r$.
- 1 état instable / 1 état stable.
- La population ne s'éteint que lorsque $E > r$



Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
- Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
- Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
- Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
- Prédation de type II

Prédation de type I - cf TD

La fonction de prélèvement

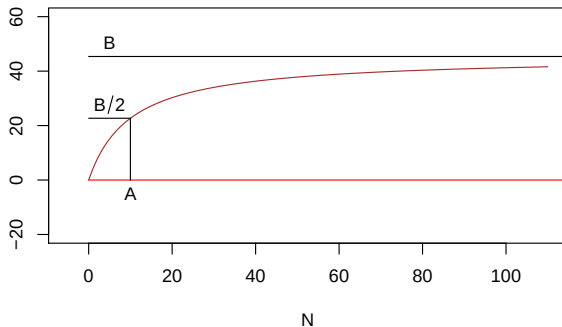
Le terme de prédation est analogue au modèle de cinétique enzymatique de Michaelis-Menten, de la forme

$$\frac{BN}{A + N}$$

- B est la vitesse maximale de prélèvement.
- Pour, $N = A$, la vitesse de prélèvement est $\frac{B}{2}$

Prédation de type I

La fonction de prélèvement



Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

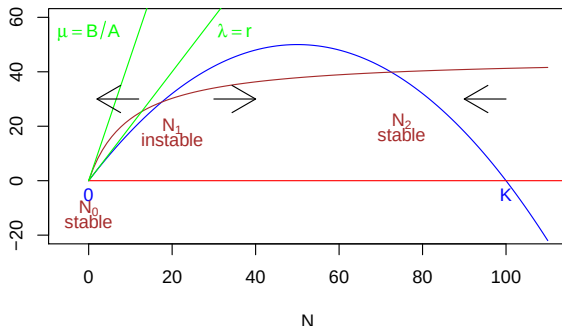
Equation du modèle

Une population d'herbacées dont la croissance est logistique est consommée par des herbivores selon une prédation de type I.

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - \frac{BN}{A + N}$$

Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

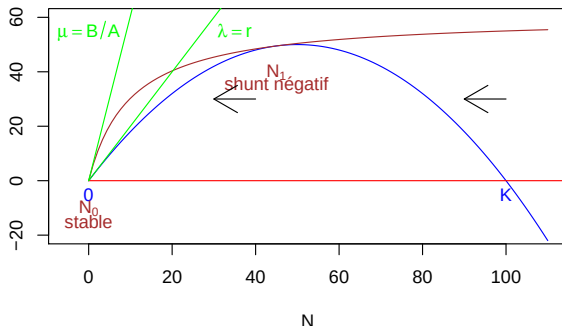
Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B < \frac{Kr}{4} \left(1 + \frac{A}{K}\right)$



Exemples de modèles classiques

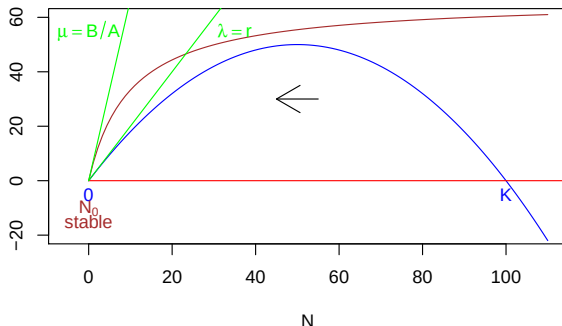
Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B = \frac{Kr}{4} \left(1 + \frac{A}{K}\right)$ 

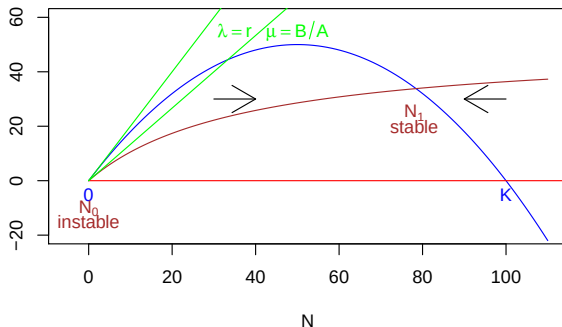
Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B > \frac{Kr}{4} \left(1 + \frac{A}{K}\right)$



Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} < r$



Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
- Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
- Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
- Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
- Prédation de type II

Prédation de type II

La fonction de prélèvement

La prédation de type II se caractérise par une forme sigmoïde de la fonction de prélèvement.

Un tel modèle présente un “effet seuil” de l’effectif de la population sur la prédation.

Le terme de prélèvement est de la forme :

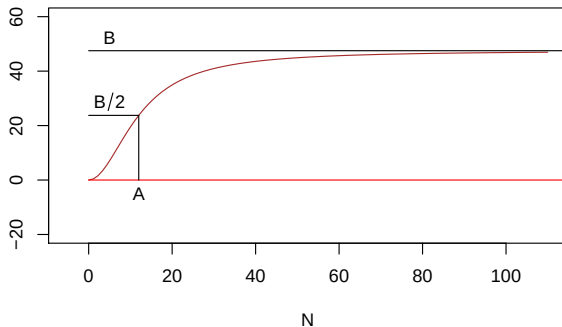
$$\frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

- B est la vitesse maximale de prélèvement.
- Pour, $N = A$, la vitesse de prélèvement est $\frac{B}{2}$

Ce type de prélèvement a été utilisé pour décrire dynamique de populations d’insectes consommés par des oiseaux et pouvant montrer des épisodes de pullulation.

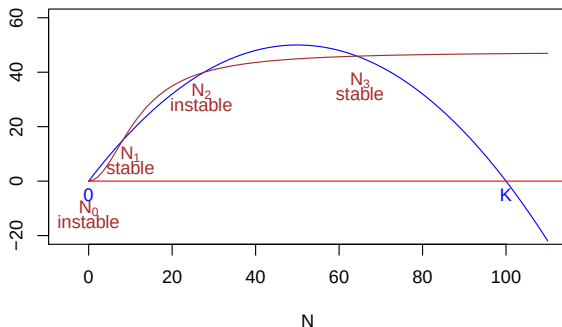
Prédation de type II

La fonction de prélèvement



Prédation de type II

Cas à 4 états d'équilibre



Prédation de type II

Ce type de prédation a été utilisé pour décrire dynamique de populations d'insectes consommés par des oiseaux et pouvant montrer des épisodes de pullulation.

- La population d'insectes est normalement maintenue à l'état d'équilibre N_1
- Un changement écologique (disparition d'un certain nombre d'oiseaux) abaisse B et l'effectif de la population est alors compris entre les nouvelles valeurs de N_2 et N_3 .
- Sans nouveau changement, l'effectif de la population atteint son nouvel état d'équilibre N_3 .

Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
- 3 Principes de l'analyse qualitative
- 4 Exemples de modèles classiques
- 5 Conclusions**
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Conclusions

Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$

Nous avons appris à effectuer l'analyse qualitative d'un système dynamique quelconque dans $\mathbb{R}$ du type $\dot{x} = f(x)$

- Recherche de points d'équilibre ($f(x^*) = 0$),
- Étude de la stabilité (signe de f entre les points d'équilibre ou linéarisation de f aux points d'équilibre),
- Étude de la forme des chroniques (courbes des solutions de l'équation de $\dot{x} = f(x)$).

Conclusions

Modèles biologiques

Nous avons envisagé des modèles de dynamique des populations impliquant une seule population. De tels cas existent, cependant on pourrait envisager la dynamique de populations en interactions :

- Interactions entre proies et prédateurs,
- Interactions entre hôtes et parasites. . .

Pour l'étude de tels modèles, la dernière partie de ce cours s'intéressera aux systèmes de deux EDO du premier ordre (systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$).

Table des matières

- 1 L'analyse des modèles linéaires
- 2 Un modèle non linéaire : le modèle logistique
- 3 Principes de l'analyse qualitative
- 4 Exemples de modèles classiques
- 5 Conclusions
- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)

Plan détaillé

- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)
 - Sujet CC décembre 2006
 - Correction CC décembre 2006

La dynamique d'une population exploitée vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN,$$

où r , K et E sont des paramètres strictement positifs.

- ❶ De quel type d'exploitation s'agit-il ?
- ❷ Quel est le modèle de croissance de la population en l'absence d'exploitation ?
- ❸ Déterminez les points d'équilibre du système.
- ❹ À l'aide d'une méthode de votre choix, déterminez la stabilité des points d'équilibre.
- ❺ Tracez le portrait de phase du système.
- ❻ Tracez les chroniques du système.
- ❼ Pour quelle valeur de E l'exploitation de la population est-elle optimale, quel est alors l'effectif de la population ?

Plan détaillé

- 6 Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)
 - Sujet CC décembre 2006
 - Correction CC décembre 2006

Type d'exploitation

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

Le terme d'exploitation est EN .

$\Rightarrow$ Il s'agit d'une exploitation à effort constant.

Modèle de croissance

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

En l'absence d'exploitation, le système devient

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K}.$$

$\Rightarrow$ On reconnaît le modèle de Gompertz.

Points d'équilibre

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

Les points d'équilibre du système vérifient :

$$\iff \frac{dN}{dt} = 0 \\ \left(-r \ln \frac{N}{K} - E \right) N = 0$$

On note que $\frac{dN}{dt}$ n'est à priori pas défini pour $N = 0$, mais que

$\lim_{N \rightarrow 0^+} \frac{dN}{dt} = 0$. $N_0^* = 0$ est donc un point d'équilibre.

Points d'équilibre

Le second point d'équilibre vérifie :

$$\begin{aligned} & -r \ln \frac{N}{K} - E = 0 \\ \iff & \ln \frac{N}{K} = -\frac{E}{r} \\ \iff & \frac{N}{K} = e^{-\frac{E}{r}} \\ \iff & N = Ke^{-\frac{E}{r}} \end{aligned}$$

Il existe donc deux points d'équilibre :

- $N_0^* = 0$
- $N_1^* = Ke^{-\frac{E}{r}}$

Stabilité des points d'équilibre

On utilise le théorème de linéarisation.

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -r - r \ln \frac{N}{K} - E$$

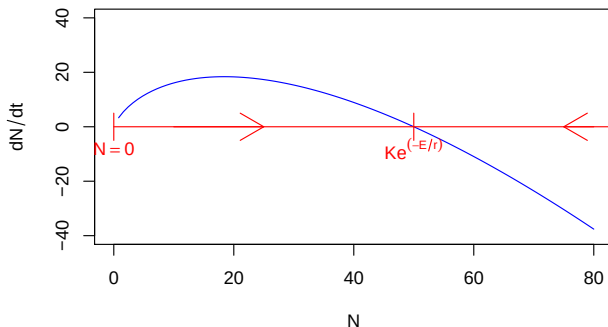
$$\frac{d\dot{N}}{dN} \text{ n'est pas définie lorsque } N = 0 \text{ mais } \lim_{N \rightarrow 0^+} \frac{d\dot{N}}{dN} = +\infty.$$

$\Rightarrow N_0^* = 0$ est un point d'équilibre instable.

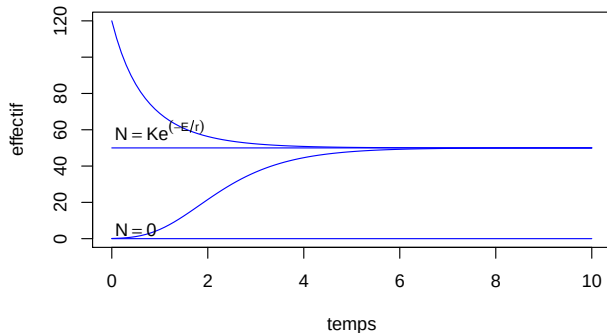
$$\left. \frac{d\dot{N}}{dN} \right|_{N=Ke^{-\frac{E}{r}}} = -r < 0$$

$\Rightarrow N_1^* = Ke^{-\frac{E}{r}}$ est un point d'équilibre stable.

Portrait de phase du système



Chroniques du système



Effort optimal d'exploitation

À l'équilibre, la quantité capturée est $EN_1^* = EK e^{-\frac{E}{r}}$. Cette quantité est maximale lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{d \left(EK e^{-\frac{E}{r}} \right)}{dE} &= 0 \\ \iff K e^{-\frac{E}{r}} \left(1 - \frac{E}{r} \right) &= 0 \\ \iff E &= r \end{aligned}$$

L'effort d'exploitation est optimal pour $E = r$, la population est alors maintenue à une taille Ke^{-1}