Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1 - 13 janvier 2023 14h
Durée 120 minutes - Tous documents autorisés

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : ☐ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez verticalement votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant : ....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Partie 1

En milieu hospitalier, l'injection de substances (médicaments, liquides nutritifs, sérum physiologique, ...) par voie intraveineuse se fait souvent à partir d'une perfusion. En effet, celle-ci permet une entrée constante du produit dans l'organisme à débit contrôlable par le personnel médical. On s'intéresse ici à l'évolution au cours du temps (variable t) de la concentration d'une substance dans le sang (variable $y(t)$) injectée par perfusion. Le produit entre alors avec un flux constant, noté E, et il est évacué par l'organisme avec un taux également constant, noté a, conduisant à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = E \quad (1)$$

Les paramètres a et E sont ici strictement positifs.

Question 1 Cette équation est une équation linéaire :

☐ à coefficients constants et sans second membre
☐ à coefficients non constants et sans second membre
☐ à coefficients non constants et avec second membre
■ à coefficients constants et avec second membre

On note $y_1(t) = Ae^{-at}$, avec $A \in \mathbb{R}$ une constante.

Question 2 Pourquoi la fonction $y_1(t)$ est-elle intéressante pour résoudre l'équation 1 ?

☐ c'est une solution particulière de l'équation avec second membre
☐ c'est la solution générale de l'équation avec second membre
■ c'est la solution générale de l'équation sans second membre
☐ c'est une solution particulière de l'équation sans second membre

On cherche ensuite une fonction constante qui soit solution de l'équation (1). On note cette fonction y_2, qui est égale à la constante $K \in \mathbb{R}$ (on a donc $y_2 = K$)

Question 3 Que vaut la constante K ?

- ☐ $\frac{a}{E}$
- ☐ a
- ☐ E
- ■ $\frac{E}{a}$

La solution générale de l'équation (1), noté $y_C(t)$, est alors donnée par $y_C(t) = Ae^{-at} + K$.

Question 4 Biologiquement, la concentration en médicament dans le sang ne peut pas être négative. Quelle relation doit alors être vérifiée entre A et K ?

- ☐ $A \leqslant -K$
- ☐ $A \leqslant 0$
- ■ $A \geqslant -K$
- ☐ $A \geqslant -\frac{K}{2}$

À $t = 0$, il n'y a pas de substance dans le sang, ce qui revient à considérer la condition initiale suivante : $y_C(0) = 0$.

Question 5 Que vaut alors $y_C(t)$?

- ☐ $y_C(t) = K\left(1 + e^{-at}\right)$
- ■ $y_C(t) = K\left(1 - e^{-at}\right)$
- ☐ $y_C(t) = K\left(1 - \frac{e^{-at}}{a}\right)$
- ☐ $y_C(t) = K\left(1 - ae^{-at}\right)$

Question 6 Que vaut la limite de $y_C(t)$ quand t tend vers $+\infty$?

- ☐ $+\infty$
- ☐ 0
- ■ K
- ☐ $\frac{K}{2}$

Question 7 L'affirmation $y_C(t) \leqslant K \quad \forall t \geqslant 0$ est :

- ■ correcte car $y_C(t)$ est croissante et tend vers K en $+\infty$
- ☐ correcte car $y_C(t)$ admet un maximum d'ordonnée égale à K
- ☐ incorrecte car la dérivée de $y_C(t)$ ne s'annule pas
- ☐ incorrecte car $y_C(t)$ est décroissante et tend vers 0

CONNAÎTRE la fonction $y_C(t)$ permet aux médecins de contrôler la concentration de la substance dans le sang de leurs patients, et donc d'éviter le sous- ou le sur-dosage. Cependant, l'hypothèse que l'entrée de médicament dans le sang est constante n'est pas toujours vérifiée car, parfois, différents événements (par ex les mouvements du patient) peuvent conduire à comprimer légèrement la tubulure de la perfusion, créant une réduction momentanée du flux entrant de médicament. Dans la pratique, nous auront donc :

$$\frac{dy}{dt}(t) + ay(t) = f(t) \quad (2)$$

Avec $f(t)$ une certaine fonction de t. Comme le flux entrant maximal est contrôlé par le personnel de l'hôpital, on aura donc $\forall t$:

$$f(t) \leqslant E$$

INTUITIVEMENT, il semblerait logique qu'une entrée de médicament réduite conduise à une concentration dans le sang plus basse, mais il est important de vérifier cela mathématiquement. Cela permet notamment de s'assurer que notre modèle ne fait pas de prédictions incohérentes. En notant $y_v(t)$ la solution générale de l'équation (2) dans laquelle$f(t) \leqslant E$, et avec $y_v(0) = 0$, on souhaite montrer qu'on aura $y_v(t)$ inférieure ou égale à la solution trouvée dans la question 5.

Question 8 Pourquoi la méthode de la solution particulière ne nous permet pas d'arriver à cette conclusion ?

- ☐ parce que la solution générale de l'équation n'est pas inférieure ou égale à Ae^{-at}
- ☐ parce que la solution générale de l'équation sans second membre n'est pas inférieure ou égale à Ae^{-at}
- ■ parce qu'aucun théorème de notre cours ne nous dit qu'on peut trouver une solution particulière inférieure ou égale à K
- ☐ pour une autre raison

Heureusement, la méthode de la solution particulière n'est pas la seule que nous ayons vue en cours. La méthode de la variation de la constante aura peut-être plus de succès, qui sait ? La méthode de la variation de la constante consiste à chercher directement $y_v(t)$, la solution générale de l'équation (2), en partant de l'hypothèse que :

$$y_v(t) = A(t)e^{-at} \quad (3)$$

Question 9 D'après l'équation (3), que vaut la dérivée de $y_v(t)$?

- ☐ $\frac{dA}{dt}(t)e^{-at} + \frac{A(t)}{a}e^{-at}$
- ☐ $\frac{dA}{dt}(t)e^{-at} - \frac{A(t)}{a}e^{-at}$
- ■ $\frac{dA}{dt}(t)e^{-at} - aA(t)e^{-at}$
- ☐ $\frac{dA}{dt}(t)e^{-at} + aA(t)e^{-at}$

Question 10 Dans l'équation (2), lorsque l'on remplace $y_v(t)$ suivant l'équation (3) et $\frac{dy_v}{dt}(t)$ par l'expression obtenue à la question 8, on arrive à la relation suivante :

- ☐ $\frac{dA}{dt}(t) = f(t)e^{at} + aA(t)e^{-at}$
- ■ $\frac{dA}{dt}(t) = f(t)e^{at}$
- ☐ $\frac{dA}{dt}(t) = f(t)e^{-at} + aA(t)e^{-at}$
- ☐ $\frac{dA}{dt}(t) = f(t)e^{-at}$

Question 11 Que peut-on dire de la fonction $g(t) = A(t) - \frac{E}{a}e^{at}$?

- ☐ elle est strictement croissante
- ☐ elle est croissante
- ■ elle est décroissante
- ☐ elle est strictement décroissante

On considère à nouveau que $y_v(0) = 0$, ce qui conduit à $g(0) = -\frac{E}{a}$.

Question 12 En écrivant que $g(t)$ sera toujours (strictement) plus grand que $g(0)$, c'est-à-dire $\forall t$, pour les fonctions (strictement) croissantes (et inversement pour les fonctions (strictement) décroissantes), qu'en déduisez-vous pour $y_v(t)$?

- ☐ $y_v(t) \leqslant \frac{E}{a}\left(a - e^{at}\right)$
- ☐ $y_v(t) \leqslant \frac{E}{a}\left(1 - ae^{-at}\right)$
- ■ $y_v(t) \leqslant \frac{E}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$
- ☐ $y_v(t) \leqslant \frac{E}{a}\left(1 - e^{-at}\right)$

Partie 2

Chez *Delia radicum*, un diptère ravageur de cultures, les mâles produisent des protéines et les transfèrent à la femelle lors de l'accouplement. Ces protéines, codées par le gène Acp26Aa, modifient le comportement de la femelle en diminuant sa motivation à s'accoupler ensuite avec d'autres mâles.

Question 13 La concentration en protéines Acp26Aa (ng/ml) dans les éjaculats a pu être déterminée pour 100 mâles. On se pose la question de savoir si la concentration en protéines suit une variable normale. Quel type de test allez-vous effectuer ?

- ☐ D'indépendance
- ■ D'ajustement
- ☐ D'égalité (homogénéité)
- ☐ De conformité

Question 14 Quelle hypothèse H_0 posez-vous ?

- ☐ La concentration en protéines dans l'éjaculat des mâles ne suit pas une loi du χ^2
- ☐ La concentration en protéines dans l'éjaculat des mâles ne suit pas une loi normale
- ■ La concentration en protéines dans l'éjaculat des mâles suit une loi normale
- ☐ La concentration en protéines dans l'éjaculat des mâles suit une loi du χ^2

À partir des dosages effectués sur les 100 mâles, 6 classes de concentration ont été déterminées. Les nombres observés de concentrations dans chaque classe sont indiqués dans la colonne 2 du tableau ci-dessous. Dans la troisième colonne figure les nombres attendus sous l'hypothèse d'une distribution normale dont on a estimé les valeurs des paramètres (μ et σ) à partir de l'échantillon des 100 mâles.

Classes de concentration	Effectifs observés	Effectifs attendus sous H_0
< 8	13	11,51
[8 ; 10[	19	22,95
[10 ; 12[	32	31,08
[12 ; 14[	23	22,95
[14 ; 16[	11	9,23
≥ 16	2	2,28

Question 15 Le χ^2 calculé vaut 1,093. Quelle est la valeur du χ^2 seuil que vous devez considérer pour un risque $\alpha = 0{,}05$?

- ■ 5,991
- ☐ 11,070
- ☐ 9,488
- ☐ 7,815

Question 16 Quelle conclusion tirez-vous du test réalisé ?

- ☐ On ne rejette pas H_0 et on prend un risque $\alpha = 0{,}05$
- ☐ On rejette H_0 et on prend un risque β inconnu
- ☐ On rejette H_0 et on prend un risque $\alpha = 0{,}05$
- ■ On ne rejette pas H_0 et on prend un risque β inconnu

Partie 3

Un échantillon de $n = 35$ mâles a été extrait d'une population de mâles ne s'étant jamais accouplés. On considère la variable X = concentration en protéines Acp26Aa (ng/ml) dans l'éjaculat d'un mâle. Soit :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 413 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 5065{,}9$$

Question 17 Quelles est l'estimation de la variance, $\hat{\sigma}^2$,de la concentration en protéines Acp26Aa dans la population de mâles ne s'étant jamais accouplés ?

- ☐ 2,345
- ■ 5,662
- ☐ 5,5
- ☐ 2,379

On veut tester l'hypothèse H_0 : la concentration en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles ne s'étant jamais accouplés est conforme à la valeur théorique (notée μ_{th}) = 12,3.

Question 18 Quelle est la valeur observée de votre statistique (en valeur absolue) ?

- ☐ 1,261
- ■ 1,243
- ☐ 3,091
- ☐ 1,917

Question 19 Votre conclusion biologique est que vous ne rejetez pas H_0. Quel risque avez-vous pris ?

☐ 0,95 ☐ 0,05 ☐ aucun ■ inconnu

Partie 4

On a élevé des mâles s'étant déjà accouplés dans des conditions de sous-alimentation. 10 mâles ont été extraits de cette population. On dose alors la concentration en protéines Acp26Aa dans les éjaculats de ces 10 mâles. On obtient la série statistique suivante :

7,8 9,4 11,3 9,9 12,2 11,7 10,9 9,7 8,8 10,5

Question 20 Quelle est l'estimation ponctuelle,$\hat{\mu}_1$ de μ_1 la concentration moyenne en protéines Acp26Aa dans la population de mâles sous alimentés ?

☐ $\frac{n}{n-1}\bar{x}_1$ ☐ $\frac{n-1}{n}\bar{x}_1$ ☐ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$ ■ $\bar{x}_1$

Question 21 Quel est l'intervalle de confiance à 0,95 de la concentration moyenne en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles de la population sous-alimentée ?

☐ [9,385 ; 11,055] ☐ [9,496 ; 10,944] ☐ [9,375 ; 11,065] ■ [9,245 ; 11,195]

Question 22 Comment interprétez-vous cet intervalle de confiance ?

☐ On a une confiance égale à 5 % que la valeur moyenne μ_1 de la population appartienne à l'intervalle de confiance

■ On a une confiance égale à 95 % que l'intervalle de confiance contienne la valeur moyenne μ_1 de la population

☐ Il y a 95 % de chance pour que la moyenne μ_1 soit égale à 10,22 ng/ml

☐ On accepte l'hypothèse que l'intervalle de confiance contienne μ_1 avec un risque inconnu

Partie 5

Dans le même temps, on a élevé des mâles s'étant déjà accouplés dans des conditions d'alimentation normale. 12 mâles ont été extraits de cette population. On dose alors la concentration en protéines Acp26Aa dans les éjaculats de ces 12 mâles. On obtient les résultats suivants :

$$\bar{x}_2 = 12{,}29 \text{ ng/ml et } s_2^2 = 2{,}025 \text{ (ng/ml)}^2$$

On désire comparer la concentration moyenne en protéines Acp26Aa (μ_1) dans la population de mâles sous alimentés avec la concentration moyenne en protéines Acp26Aa (μ_2) dans la population de mâles alimentés normalement.

Question 23 Quelle est l'unique proposition correspondant aux conditions nécessaires à l'application du test approprié ?

☐ La variable suit une loi normale et les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont connues

☐ Les variances sont égales

☐ Les variances dans les deux populations σ_1^2 et σ_2^2 sont connues

■ La variable suit une loi normale et les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont égales

Question 24 Quelle est la valeur absolue de votre statistique observée ?

☐ 2,356 ☐ 5,503 ■ 3,375 ☐ 2,245

Question 25 Pour lire la valeur seuil (valeur de rejet), combien de degrés de liberté avez-vous considéré ?

☐ aucun car test ϵ ☐ 10 et 12 ☐ 22 ■ 20

Question 26 Quelle conclusion biologique tirez-vous de votre test (risque $\alpha = 0{,}05$)

- ☐ Les concentrations moyennes en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles sont les mêmes dans les deux populations avec un risque β inconnu
- ☐ Les concentrations moyennes en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles sont différentes dans les deux populations avec un risque β inconnu
- ☐ Les concentrations moyennes en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles sont les mêmes dans les deux populations avec un risque $\alpha = 0{,}05$
- ■ Les concentrations moyennes en protéines Acp26Aa dans les éjaculats des mâles sont différentes dans les deux populations avec un risque $\alpha = 0{,}05$

Question 27 Votre conclusion biologique aurait-elle été la même si vous aviez considéré un risque $\alpha = 0{,}01$?

- ☐ non
- ■ oui
- ☐ on ne peut pas savoir
- ☐ cela dépend des degrés de liberté

Partie 6

Dans la population de mâles élevés dans des conditions alimentaires normales, la probabilité qu'un mâle porte une mutation du gène Acp26Aa est égale à 0,01. On a prélevé au hasard 10 mâles dans cette population. On s'intéresse à la variable aléatoire X = nombre de mâles portants la mutation parmi 10.

Question 28 Quelle est la probabilité qu'un mâle porte la mutation ?

■ 0,091 ☐ 0,009 ☐ 1 ☐ 0,904

Question 29 Quelle est l'espérance de X ?

■ 0,1 ☐ 0,009 ☐ 1 ☐ 0,01

Question 30 Dans cette même population, la probabilité qu'un mâle ait les yeux blanc est de 0,12 (les yeux sont habituellement marron chez les mâles) et la probabilité qu'un mâle porte la mutation du gène Acp26Aa et ait les yeux blanc est de 0,0022. Quelle est la proposition exacte parmi celles-ci-dessous ?

- ☐ Les événements sont indépendants en probabilité
- ☐ Les événements forment un système complet d'événement
- ■ Les événements ne sont pas indépendants en probabilité
- ☐ Les événements sont incompatibles

Question 31 On extrait au hasard un mâle de la population. Quelle est la probabilité qu'il ait les yeux marron s'il porte la mutation du gène Acp26Aa ?

☐ 0,1188 ■ 0,78 ☐ 0,89 ☐ 0,99

- Fin du sujet -