

Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1 - 11 janvier 2022
Durée 120 minutes - Tous documents autorisés

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

- Pour sélectionner une case, remplissez-la intégralement au stylo à bille en **noir** : $\square \rightarrow \blacksquare$.
- Ne pas utiliser de crayon à papier.

- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex[®]).
 - N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
 - Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
 - Une réponse fautive donne des points négatifs.
-

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

.....

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

Partie 1

L'OBJECTIF de cette partie est d'étudier l'évolution dans le temps, t , du nombre d'individus nés dans l'année, y , dans une population de lapins (*Oryctolagus cuniculus*). La démographie des lapins peut être schématisée ainsi :

- une première phase (printemps-été) correspondant à la saison de reproduction. Globalement, l'effectif des lapins augmente au cours de cette période.
- une deuxième phase (automne-hiver) durant laquelle il n'y a plus de naissances. L'effectif des lapins diminue au cours de cette période à cause de la mortalité.

L'UNITÉ DE TEMPS (notée t) est l'année et son origine ($t = 0$) est fixée au début du printemps. La première phase correspond à l'intervalle de temps $[0; 0,5]$ et la deuxième à $[0,5; 1]$. On commence par s'intéresser à l'évolution du nombre de lapins dans la population en fonction du temps durant la première phase. Celle-ci est représentée par l'équation suivante :

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t) - m \times y(t) \quad (\text{eq. 1})$$

où le terme $m \times y(t)$ représente la mort des lapins, m est appelé « taux de mortalité », il est réel, strictement positif et constant. $f(t)$ représente le nombre de naissances par unité de temps dans la population. Durant la première phase nous prendrons pour $f(t)$ la fonction :

$$f(t) = b \times \sin(2\pi t) \quad \text{pour } t \in [0; 0,5] \quad (\text{eq. 2})$$

b étant un paramètre réel et strictement positif.

Question 1 La fonction $f(t)$

- admet un point d'inflexion en $t = 0,25$ est monotone décroissante sur $[0; 0,5]$
 est monotone croissante sur $[0; 0,5]$ admet un point d'inflexion en $t = 0,5$

Question 2 On rappelle que $f(t)$ représente le nombre de naissances dans la population par unité de temps. Que vaut le nombre de naissances cumulé entre $t = 0$ et $t = 0,5$?

- $\frac{b}{2\pi}$ $b\pi$ b $b2\pi$ $\frac{b}{\pi}$

Question 3 Quel est le maximum de la fonction $f(t)$ sur l'intervalle $[0; 0,5]$ et à quelle valeur de t correspond-il ?

- $\frac{b}{2}$, obtenu pour $t = 0,5$ b , obtenu pour $t = 0$
 $\frac{b}{2}$, obtenu pour $t = 0,25$ b , obtenu pour $t = 0,25$

Avec cette fonction $f(t)$ et en manipulant légèrement l'équation (1), on obtient :

$$\frac{dy(t)}{dt} + m \times y(t) = b \times \sin(2\pi t) \quad (\text{eq. 3})$$

Question 4 On note $y_1(t)$ la solution de l'équation sans second membre de l'équation (3). Que vaut $y_1(t)$?

- e^{-mt} e^{mt} $A \times e^{mt}, A \in \mathbb{R}$ $A \times e^{-mt}, A \in \mathbb{R}$

L'équation (3) admet une solution particulière, notée $y_2(t)$, de la forme :

$$y_2(t) = \alpha \cos(2\pi t) + \beta \sin(2\pi t) \quad (\text{eq. 4})$$

Question 5 On rappelle que la dérivée de $\sin(x)$ est $\cos(x)$ et que celle de $\cos(x)$ est $-\sin(x)$. Quelle est la dérivée de $y_2(t)$?

- $-2\pi\alpha \sin(2\pi t) + 2\pi\beta \cos(2\pi t)$ $2\pi\alpha \sin(2\pi t) + 2\pi\beta \cos(2\pi t)$
 $-2\pi\alpha \sin(2\pi t) - 2\pi\beta \cos(2\pi t)$ $2\pi\alpha \sin(2\pi t) - 2\pi\beta \cos(2\pi t)$

EN REMPLAÇANT $\frac{dy_2}{dt}$ et y_2 par les formules obtenues en réponse aux questions précédentes, vous obtenez par identification les valeurs de α et β pour lesquelles y_2 est solution de l'équation (2).

Question 6 Comment s'appelle cette méthode de résolution d'une équation différentielle ?

- la variation de la constante la solution particulière
 l'intégration par partie la séparation des variables

Question 7 Que valent α et β ?

- $\alpha = \frac{2\pi b}{4\pi^2 + m^2}; \beta = \frac{mb}{4\pi^2 + m^2}$ $\alpha = \frac{-2\pi b}{4\pi^2 + m^2}; \beta = \frac{mb}{4\pi^2 + m^2}$
 $\alpha = \frac{-2\pi b}{4\pi^2 + m^2}; \beta = \frac{-mb}{4\pi^2 + m^2}$ $\alpha = \frac{2\pi b}{4\pi^2 + m^2}; \beta = \frac{-mb}{4\pi^2 + m^2}$

ON S'INTÉRESSE maintenant à la deuxième phase (automne-hiver), qui correspond à un temps t compris entre 0,5 (début de l'automne) et 1 (fin de l'hiver). Durant cette phase, le modèle est simplifié par l'absence de naissances. Cependant, le taux de mortalité varie en fonction des conditions météorologiques et donc au cours du temps. L'équation de $y(t)$ devient alors :

$$\frac{dy(t)}{dt} = -m \times (1 - \sin(2\pi t)) \times y(t) \quad (\text{eq. 5})$$

On note $y_3(t)$ la solution générale de l'équation (5) qui est biologiquement pertinente, c'est-à-dire pour laquelle on a $y_3(t) \geq 0$ quelque soit t compris entre 0,5 et 1.

Question 8 D'après l'équation (5), sur l'intervalle $[0,5; 1]$, la fonction $y_3(t)$ est :

- croissante comme on pouvait s'y attendre
- décroissante comme on pouvait s'y attendre
- croissante contrairement à ce à quoi on s'attendait
- décroissante contrairement à ce à quoi on s'attendait

Question 9 Quelle est cette solution générale $y_3(t)$ de l'équation (5) avec $B \in \mathbb{R}$?

- $B \times e^{-mt - \frac{m}{2\pi} \cos(2\pi t)}$
- $B \times e^{-m + \frac{m}{2\pi} \cos(2\pi t)}$
- $B \times e^{-mt + \frac{m}{2\pi} \cos(2\pi t)}$
- $B \times e^{-mt + \frac{m}{2\pi} \sin(2\pi t)}$

Partie 2

UNE CHERCHEUSE spécialiste de la biologie des populations de lagomorphes a conduit une étude sur le lapin de garenne (*Oryctolagus cuniculus*). La première expérience a consisté à échantillonner 200 individus dans une population localisée en France afin d'estimer la distribution du nombre d'ectoparasites par individu. Les ectoparasites vivent sur la peau ou dans les poils des lapins. La chercheuse désirait également obtenir un maximum de parasites pour une étude annexe que nous n'aborderons pas ici. Elle a donc utilisé un indice qu'elle pensait être lié à la charge parasitaire individuelle. Cet indice est l'apparence physique de l'animal (luisance du pelage). Les individus capturés dont le pelage était considéré comme bien luisant et soyeux étaient relâchés et n'ont donc pas été utilisés pour estimer la distribution du nombre de parasites par individu.

Question 10 En considérant le but premier de l'étude (estimer la distribution du nombre d'ectoparasites par individu dans la population étudiée), le protocole d'échantillonnage utilisé vous paraît-il :

- Bon car chaque individu de la population avait la même probabilité d'être prélevé dans l'échantillon retenu
- Mauvais car la chercheuse a utilisé un échantillon aléatoire simple de la population de lapin
- Bon car la taille de l'échantillon est supérieure à 30
- Mauvais car chaque individu de la population n'avait pas la même probabilité d'appartenir à l'échantillon retenu

Le tableau suivant résume les données obtenues

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9	Σ
n	6	15	40	42	37	30	10	12	8	0	200
nx	0	15	80	126	148	150	60	84	64	0	727

Avec X le nombre d'ectoparasites par lapin et n le nombre de lapins infectés par x ectoparasites. La chercheuse veut savoir si X est distribué selon une loi de POISSON.

Question 11 Quelle est la bonne formulation ?

- La loi de POISSON dépend d'un seul paramètre (probabilité de succès)
- La loi de POISSON dépend de deux paramètres (nombre d'épreuves et probabilité de succès)
- La loi de POISSON dépend de deux paramètres (nombre d'épreuves et variance)
- La loi de POISSON dépend d'un seul paramètre (moyenne = variance)

Question 12 Quelle est la moyenne de la distribution observée dans l'échantillon ?

- 3,53
- 3,45
- 3,43
- 3,63

CORRECTION

Question 13 Quelle est la valeur de la probabilité (attendue sous H_0) que le nombre d'ectoparasites soit égal à 0, sachant que la moyenne de la distribution observée a été arrondie à la valeur 3,5 et que cette valeur est utilisée comme estimation du paramètre λ de la loi de POISSON ?

- 0,0042 0,0302 0,0502 0,1020

Question 14 Le nombre de lapins infectés par 1 ectoparasite (attendu sous H_0) est obtenu en multipliant $P(X = 1)$ par :

- 927 15 200 727

Le tableau suivant indique les effectifs observés (n) et théoriques (= attendus) sous H_0 (n_t).

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
n	6	15	40	42	37	30	10	12	8	0
n_t	6,04	21,14	37	43,16	37,76	26,44	15,42	7,7	3,38	1,96

Question 15 Quelle est la proposition exacte par rapport à la réalisation du test à utiliser ?

- Il n'est pas nécessaire de regrouper des classes car n est supérieur ou égal à 30
 Il n'est pas nécessaire de regrouper des classes car nx n est supérieur ou égal à 30
 Il est nécessaire de regrouper des classes car tous les effectifs observés ne sont pas supérieurs ou égaux à 5
 Il est nécessaire de regrouper des classes car tous les effectifs théoriques ne sont pas supérieurs ou égaux à 5

Question 16 Quelle est la valeur observée de la statistique du test ?

- 6,18 15,18 20,18 8,18

Question 17 Quel est le nombre de degré de liberté (ddl) à utiliser pour connaître la valeur théorique (seuil) de la statistique du test ?

- 7 8 6 9

Question 18 En choisissant un risque $\alpha = 0,05$, quelle est la valeur théorique de la statistique du test à utiliser ?

- 14,07 16,92 12,59 15,51

Question 19 Conclusion statistique ?

- H_0 acceptable avec un risque β inconnu Rejet de H_0 avec un risque β égal à 0,05
 Rejet de H_0 avec un risque α égal à 0,05 H_0 acceptable avec un risque β égal à 0,05

Question 20 Conclusion biologique ?

- Les données observées sont très compatibles avec l'hypothèse d'une distribution d'ectoparasites suivant une loi de POISSON dans la population de lapins
 Les données observées sont très compatibles avec l'hypothèse d'une distribution d'ectoparasites suivant une loi de POISSON dans l'échantillon de lapins
 Les données observées sont peu compatibles avec l'hypothèse d'une distribution d'ectoparasites suivant une loi de POISSON dans la population de lapins
 Les données observées sont peu compatibles avec l'hypothèse d'une distribution d'ectoparasites suivant une loi de POISSON dans l'échantillon de lapins

Question 21 Quelle est la proposition exacte ?

- La conclusion n'est pas critiquable car la taille de l'échantillon est supérieure à 30
- La conclusion est critiquable car l'échantillonnage réalisé sur-estime probablement le nombre d'individus sains
- La conclusion n'est pas critiquable car l'échantillon est représentatif de la population naturelle de lapin correspondant à l'objectif de la chercheuse
- La conclusion est critiquable car l'échantillonnage réalisé sous-estime probablement le nombre d'individus sains

Partie 3

IL EXISTE des produits sanitaires qui détruisent les ectoparasites des lapins mais les doses à utiliser dépendent du poids des animaux. La chercheuse a donc voulu estimer le poids moyen (en kg) des lapins ainsi que la variance de la population étudiée à partir d'un échantillon de taille $n = 10$. Elle obtient :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 15 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 = 100$$

Question 22 Quelles sont les estimations de la moyenne et de la variance du poids des lapins dans la population étudiée ?

- $\mu = 1,5 ; \sigma^2 = 8,61$
- $\hat{\mu} = 1,5 ; \hat{\sigma}^2 = 8,61$
- $\hat{\mu} = 1,5 ; \hat{\sigma}^2 = 7,75$
- $\mu = 1,5 ; \sigma^2 = 7,75$

Question 23 Si en pratique, on était capable de prélever un nombre très élevé d'échantillons aléatoire simples de taille égale à celle de l'échantillon de l'étude, quelle serait la formulation exacte ?

- Toutes les estimations de moyenne seraient égales entre elles mais très différentes de la moyenne de la population
- Toutes les estimations de moyenne seraient égales entre elles et identiques à la moyenne de la population
- Toutes les estimations de moyenne seraient différentes entre elles mais en moyenne proches de la moyenne de la population
- Toutes les estimations de moyenne seraient différentes entre elles et en moyenne très différentes de la moyenne de la population

Question 24 Quelle est la proposition exacte ?

- Un intervalle de confiance d'une moyenne permet de quantifier une marge d'erreur de l'estimation obtenue et de faire une inférence sur la moyenne de la population
- Un intervalle de confiance d'une moyenne permet de quantifier une marge d'erreur de l'estimation obtenue et de faire une inférence sur la variance de la population
- Un intervalle de confiance d'une moyenne permet de quantifier une marge d'erreur de μ et de faire une inférence sur la moyenne de l'échantillon
- Un intervalle de confiance d'une moyenne permet de quantifier une marge d'erreur de l'estimation obtenue et de faire une inférence sur la variance de l'échantillon

Question 25 À partir du calcul de l'intervalle de confiance (IC) pour un niveau de confiance égal à 0,95 (en arrondissant l'estimation de la variance et de l'écart-type et les autres calculs à deux chiffres après la virgule), quelle est la proposition exacte

- La précision de l'estimation du poids moyen des lapins n'est pas bonne car les 2 bornes de l'IC ne sont pas réalistes
- La précision de l'estimation du poids moyen des lapins est bonne car on a utilisé $\hat{\mu}$
- La précision de l'estimation du poids moyen des lapins est bonne car on a utilisé une formule statistique
- La précision de l'estimation du poids moyen des lapins n'est pas bonne car au moins une des bornes de l'IC n'est pas réaliste

Question 26 Quelle est la proposition exacte ?

- La conclusion à la question précédente est certaine car on a réalisé des calculs statistiques
- La conclusion à la question précédente est incertaine car l'intervalle de confiance a 95 % de risque de ne pas contenir la valeur du poids moyen des lapins de la population
- La conclusion à la question précédente est incertaine car l'intervalle de confiance a 5 % de risque de ne pas contenir la valeur du poids moyen des lapins de la population
- La conclusion à la question précédente est certaine car on a calculé un intervalle de confiance avec un niveau de confiance égal à 0,95

Question 27 Proposez une solution pour réduire l'amplitude de l'intervalle de confiance sans changer le niveau de confiance

- Augmenter l'erreur standard (= écart-type de l'estimateur de la moyenne) en diminuant la taille de l'échantillon et/ou l'écart-type du poids (= déviation standard) des lapins en choisissant des lapins de même âge et de même génotype
- Augmenter l'erreur standard (= écart-type de l'estimateur de la moyenne) en augmentant la taille de l'échantillon et/ou l'écart-type du poids (= déviation standard) des lapins en choisissant des lapins de plusieurs populations
- Diminuer l'erreur standard (= écart-type de l'estimateur de la moyenne) en augmentant la taille de l'échantillon et/ou en réduisant l'écart-type du poids (= déviation standard) des lapins en choisissant par exemple des lapins de même âge et de même génotype
- Diminuer l'erreur standard (= écart-type de l'estimateur de la moyenne) en diminuant la taille de l'échantillon et/ou l'écart-type du poids (= déviation standard) des lapins en choisissant des lapins de plusieurs populations

Partie 4

LA CHERCHEUSE veut savoir si le poids moyen d'une population naturelle de lapin parasités (autre que la population étudiée précédemment) diffère ou non de celui d'une population de lapin de référence (maintenue en captivité) qui n'est pas parasitée et vivant dans la même région que la population parasitée. Le poids moyen de la population parasitée a été estimé via un échantillon de taille $n = 10$. On considère que le poids moyen de la population de référence est connu exactement (en négligeant les erreurs de mesures) car tous les individus de la population captive ont été pesés.

Question 28 Quel est le test à réaliser ?

- Test d'égalité de 2 moyennes avec $H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- Test d'égalité de 2 moyennes avec $H_0 : \mu_1 = \mu_2$
- Test de conformité de moyenne avec $H_0 : \mu = \mu_0$
- Test de conformité de moyenne avec $H_0 : \bar{x} = \mu_0$

Question 29 La valeur de la statistique observée est inférieure en valeur absolue à la valeur seuil calculée au risque $\alpha = 0,05$. Quelle est la conclusion du test ?

- Le poids moyen des lapins varie entre les 2 populations avec un risque de se tromper de 5 %
- Le poids moyen des lapins est le même dans les 2 échantillons avec un risque de se tromper de 5 %
- Le poids moyen des lapins varie entre les 2 échantillons avec un risque de se tromper de 5 %
- On n'a pas réussi à mettre en évidence une différence de poids moyens entre les 2 populations