

Mathématiques pour les Sciences de la Vie

Contrôle Terminal - Session 1

17 décembre 2019 - Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

- Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : → .
- Ne pas utiliser de crayon à papier.

- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex[®]).
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
- Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

.....

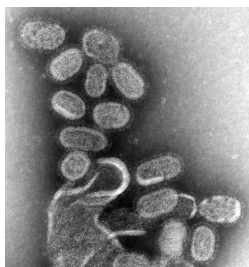
Numéro d'étudiant :

.....

<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0	<input type="checkbox"/>	0
<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1	<input type="checkbox"/>	1
<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	2
<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3	<input type="checkbox"/>	3
<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>	4
<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5	<input type="checkbox"/>	5
<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6	<input type="checkbox"/>	6
<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7	<input type="checkbox"/>	7
<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8	<input type="checkbox"/>	8
<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9	<input type="checkbox"/>	9

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

Première partie : épidémie de grippe



ON s'intéresse dans cette partie à la diffusion d'une épidémie de grippe au sein d'une population d'individus sains dont on désigne le nombre au temps t par la variable $y(t)$. On désigne par $x(t)$ le nombre d'individus infectés par la grippe au temps t . On modélise la vitesse à laquelle apparaissent de nouveaux cas de grippe à partir d'une situation initiale où un seul individu de la population est infecté par le virus. On considérera ici que la taille de la population reste constante tout au long de la période modélisée et égale à $x(t) + y(t) = N + 1$.

ON considère que cette vitesse est proportionnelle au nombre de contacts entre individus sains et infectés, ce qui sera approximé ici à chaque instant par le produit $x(t)y(t)$, ce qui produit l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t)y(t) \quad \text{avec} \quad \beta > 0$$

Question 1 Quelle interprétation biologique peut-on faire du paramètre β ?

- Taux de mortalité
- Taux de guérison

- Taux de croissance
- Taux d'infection

Question 2 Comment réécrire l'EDO précédente pour pouvoir la résoudre ?

CORRECTION

$$\square \frac{dy(t)}{dt} = \beta \frac{y(t)}{N+1-y(t)}$$

$$\square \frac{dx(t)}{dt} = \beta \frac{N+1-x(t)}{y(t)}$$

$$\blacksquare \frac{dx(t)}{dt} = \beta x(t) (N+1-x(t))$$

$$\square \frac{dy(t)}{dt} = \beta (N+1-y(t)) y(t)$$

Question 3 L'EDO précédente est-elle :

- d'ordre 2?
 homogène?

- linéaire?
 à variables séparables?

Question 4 Quelle est la décomposition en éléments simples de l'expression $\frac{1}{x(N+1-x)}$:

$$\square \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+1-x} \right)$$

$$\square \frac{1}{x} - \frac{1}{N+1-x}$$

$$\blacksquare \frac{1}{N+1} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N+1-x} \right)$$

$$\square \frac{1}{x} + \frac{1}{N+1-x}$$

Question 5 Quelles sont les primitives de l'expression $\frac{1}{x} + \frac{1}{N+1-x}$ ($x > 0$, $K \in \mathbb{R}$) :

- $\ln(x) + \ln(N+1-x) + K$
 $\ln(x) - \ln(N+1-x) + K$

- $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(N+1-x)^2} + K$
 $-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(N+1-x)^2} + K$

Question 6 On pose $C = e^{-K}$. Déduire de votre réponse à la question précédente une expression de $\frac{x(t)}{N+1-x(t)}$.

- $C + e^{(N+1)\beta t}$ $C + e^{-(N+1)\beta t}$ $C e^{(N+1)\beta t}$ $C - e^{(N+1)\beta t}$

Question 7 En déduire l'ensemble des solutions de l'EDO régissant la dynamique temporelle de l'épidémie.

$$\blacksquare x(t) = \frac{C(N+1)}{C + e^{-(N+1)\beta t}}$$

$$\square x(t) = \frac{C(N+1)}{C - e^{-(N+1)\beta t}}$$

$$\square x(t) = \frac{C(N+1)}{C + e^{(N+1)\beta t}}$$

$$\square x(t) = \frac{C(N+1)}{C - e^{(N+1)\beta t}}$$

Question 8 Quelle est la condition initiale correspondant au problème traité ici ?

- $x(0) = N$
 $x(0) = 0$

- $x(0) = 1$
 $x(0) = N+1$

Question 9 En déduire la valeur de la constante C .

- $C = \frac{1}{N-1}$ $C = -\frac{1}{N}$ $C = \frac{1}{N}$ $C = \frac{1}{N+1}$

Question 10 Donner l'expression de la solution particulière de l'EDO régissant la dynamique temporelle de l'épidémie et correspondant à la condition initiale précédente.

$$\square x(t) = \frac{N+1}{1 - N e^{-(N+1)\beta t}}$$

$$\blacksquare x(t) = \frac{N+1}{1 + N e^{-(N+1)\beta t}}$$

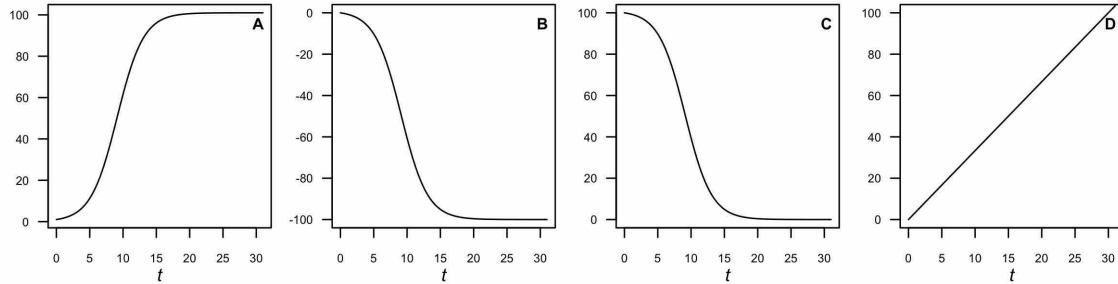
$$\square x(t) = \frac{N+1}{1 + (N-1) e^{-(N+1)\beta t}}$$

$$\square x(t) = \frac{N+1}{1 + (N+1) e^{-(N+1)\beta t}}$$

Question 11 Que vaut $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$?

- 0 N $N + 1$ 1

Question 12 Quelle est la courbe représentative de $x(t)$?



- D B A C

Question 13 En déduire une valeur *approximative* de N .

- 0 100 $+\infty$ 60

Question 14 En déduire laquelle des courbes proposées à la question 12 est la courbe représentative de $y(t)$.

- D B C A

Deuxième partie

LES personnes atteintes de la grippe souffrent généralement d'une forte fièvre, de frissons. On observe souvent dans le mois qui suit la guérison, une perte de poids chez les individus âgés. La perte de poids (en kg) a été mesurée chez des hommes âgés ayant été grippés et les données ont été réparties en 5 classes de perte de poids comme indiqué dans le tableau suivant :

Perte de poids (kg)	Effectif observés	Effectifs théoriques
]0,0 ; 0,4]	74	77,11
]0,4 ; 0,8]	106	101,33
]0,8 ; 1,2]	152	147,59
]1,2 ; 1,6]	94	99,68
]1,6 ; 2,0]	81	81,39

Question 15 On désire savoir si la variable étudiée suit une loi normale dont les paramètres ont été estimés à partir de la perte de poids moyenne et de la variance de cet échantillon. Quel type de test est utilisé?

- Test d'ajustement Test d'égalité
 Test d'indépendance Test de conformité

Question 16 Quelle loi suit la statistique du test sous l'hypothèse nulle?

- Loi binomiale Loi de POISSON Loi normale Loi du χ^2

Question 17 Quel est le nombre de degrés de liberté de cette statistique ?

- 3 2 4 5

Question 18 Quelle est la valeur de la statistique observée ?

- 5,99 0,798 -0,03 1,96

Question 19 Quelle conclusion tirez-vous du test réalisé (avec un risque de première espèce $\alpha = 0,05$) ?

- On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la perte de poids suit une loi du χ^2 On ne peut pas considérer que la perte de poids suit une loi normale
 On ne peut pas considérer que la perte de poids suit une loi du χ^2 On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la perte de poids suit une loi normale

Question 20 Quel est le risque associé à cette conclusion ?

- $1 - \beta$ $\alpha = 0,05$ $\alpha = 0,95$ β

Troisième partie

La conclusion tirée de la partie précédente sera adoptée pour la suite. À la suite d'un épisode de grippe, la perte de poids de $n_1 = 26$ hommes âgés ayant eu la grippe (échantillon aléatoire simple) a été calculée. Dans cet échantillon, on calcule $\bar{x}_1 = 0,825$ kg et $s_1^2 = 1,724$ kg², respectivement la moyenne et la variance de la perte de poids de ces 26 hommes. On note μ_1 la moyenne de la perte de poids pour la population d'hommes âgés ayant eu la grippe.

Question 21 Quelle est l'estimation ponctuelle, $\hat{\mu}_1$, de μ_1 ?

- $\frac{n_1-1}{n_1} \bar{x}_1$ $\frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} x_{1i}$ $\frac{n_1}{n_1-1} \bar{x}_1$ \bar{x}_1

Question 22 Quelle est l'estimation ponctuelle, $\hat{\sigma}_1$, de l'écart-type de cette population ?

- $\sqrt{1,724}$ $\sqrt{1,793}$ 1,793 1,724

Question 23 Quel est l'intervalle de confiance à 0,95 (c'est-à-dire avec $\alpha = 0,05$) de μ ?

- [0,310 ; 1,339] [0,320 ; 1,330] [0,295 ; 1,355] [0,284 ; 1,366]

Question 24 Quelle est l'interprétation biologique de cet intervalle de confiance ?

- On accepte l'hypothèse que $\mu_1 = 0,825$ kg avec un risque β inconnu de contenir la valeur moyenne μ_1 pour la population
 L'intervalle de confiance a 95 % de chance de contenir la valeur moyenne μ_1 de la population Il y a 95 % de chance pour que la moyenne μ_1 soit égale à 0,825
 L'intervalle de confiance a 5 % de chance de contenir la valeur moyenne μ_1 pour la population On accepte l'hypothèse que l'intervalle de confiance contienne μ_1

CORRECTION

La perte de poids a été mesurée sur un échantillon aléatoire simple de $n_2 = 19$ femmes âgées ayant eu la grippe. On donne les éléments suivants : $\bar{x}_2 = 0,78$ kg, $s_2^2 = 1.6616$ kg². On désire savoir si on peut considérer que la perte de poids moyenne des hommes ayant eu la grippe, μ_1 est égale à la perte de poids moyenne des femmes ayant eu la grippe, μ_2 .

Question 25 Quelle proposition est nécessaire à l'application du test approprié ?

- | | |
|--|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> La variable suit une loi normale et les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont égales | <input type="checkbox"/> Les variances dans les deux populations (respectivement σ_1^2 et σ_2^2) sont connues |
| <input type="checkbox"/> La variable suit une loi normale et les effectifs sont petits | <input type="checkbox"/> Les effectifs théoriques doivent être au moins égaux à 5 |
| <input type="checkbox"/> Les effectifs doivent être grands (>30) | |

Question 26 Quelle est l'hypothèse nulle, H_0 , pouvez-vous formuler ?

- La perte de poids moyenne dans la population des femmes âgées ayant eu la grippe est égale à 0.825 kg
- La perte de poids moyenne dans l'échantillon des femmes âgées ayant eu la grippe est égale à 0.825 kg
- La perte de poids suite à un épisode de grippe est différente dans la population des hommes âgés et dans la population des femmes âgées
- La perte de poids moyenne des personnes ayant eu la grippe est la même dans la population des femmes âgées que dans la population des hommes âgés

Question 27 Quelle est la valeur de la statistique observée ?

- 0,084 0,993 0,989 0,112

Question 28 Quelle est la valeur seuil de rejet de la statistique ($\alpha = 0,02$) ?

- 2,326 7,063 5,025 1,96

Question 29 Quelle conclusion tirez-vous du test réalisé à la question précédente ?

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Les moyennes des deux échantillons sont différentes | <input type="checkbox"/> On ne peut pas conclure que les moyennes des deux échantillons sont différentes |
| <input type="checkbox"/> On ne peut pas conclure que les moyennes des deux populations sont égales avec un risque α inconnu | <input checked="" type="checkbox"/> On ne peut pas conclure que les moyennes des deux populations sont différentes |

Question 30 Quelle est la probabilité de vous tromper dans votre conclusion ?

- | | | |
|--|-------------------------------|--------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> inconnue | <input type="checkbox"/> 0,95 | <input type="checkbox"/> 0,02 |
| <input type="checkbox"/> 0,05 | <input type="checkbox"/> 0,98 | <input type="checkbox"/> $1 - \beta$ |

Quatrième partie

DANS la population, la probabilité qu'un individu soit une femme est égale à 0,52. La probabilité qu'un individu soit âgé est égale à 0,28. La probabilité qu'un individu soit une femme âgée est égale à 0,18.

Question 31 Que dire des événements « être une femme » et « être âgé » ?

- Ils sont incompatibles en probabilité On ne peut pas savoir s'ils sont indépendants ou non
 Ils ne sont pas indépendants en probabilité
 Ils sont indépendants en probabilité

Question 32 Quelle est la probabilité qu'un individu soit un homme s'il s'agit d'une personne âgée ?

- 0,654 0,357 0,643 0,462

Question 33 Quelle est la probabilité qu'un individu soit une femme ou une personne âgée ?

- 0,98 0,80 0,38 0,62

- Fin du sujet -