Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
11 janvier 2019 - Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : ☐ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

☐**0**	☐**0**	☐**0**	☐**0**	☐**0**	☐**0**	☐**0**	☐**0**
☐**1**	☐**1**	☐**1**	☐**1**	☐**1**	☐**1**	☐**1**	☐**1**
☐**2**	☐**2**	☐**2**	☐**2**	☐**2**	☐**2**	☐**2**	☐**2**
☐**3**	☐**3**	☐**3**	☐**3**	☐**3**	☐**3**	☐**3**	☐**3**
☐**4**	☐**4**	☐**4**	☐**4**	☐**4**	☐**4**	☐**4**	☐**4**
☐**5**	☐**5**	☐**5**	☐**5**	☐**5**	☐**5**	☐**5**	☐**5**
☐**6**	☐**6**	☐**6**	☐**6**	☐**6**	☐**6**	☐**6**	☐**6**
☐**7**	☐**7**	☐**7**	☐**7**	☐**7**	☐**7**	☐**7**	☐**7**
☐**8**	☐**8**	☐**8**	☐**8**	☐**8**	☐**8**	☐**8**	☐**8**
☐**9**	☐**9**	☐**9**	☐**9**	☐**9**	☐**9**	☐**9**	☐**9**

Les parties sont indépendantes les unes des autres.

1 Première partie

Une étude menée sur une espèce de maïs (*Zea mays*) a permis de quantifier l'accumulation d'un insecticide tout au long de la vie d'un individu. Les résultats indiquent que le processus d'accumulation peut être décrit par l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$a\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = f(t) \quad (1)$$

Dans cette équation, $y(t)$ décrit la concentration en insecticide dans l'organisme en fonction du temps t (mesuré en mois). La fonction $f(t)$ décrit la concentration en insecticide dans l'environnement en fonction du temps et a et b sont des constantes.

Question 1 De quel type est cette équation différentielle ?

☐ Équation différentielle à variable séparable
☐ Équation différentielle homogène
☐ Équation différentielle linéaire sans second membre
■ Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Question 2 Donnez la forme générale des solutions de l'équation (1) sans second membre

- ☐ $y_s(t) = Ke^{rt}$ avec $r = \frac{b}{a}$
- ■ $y_s(t) = Ke^{rt}$ avec $r = -\frac{b}{a}$
- ☐ $y_s(t) = Ke^{rt}$ avec $r = \frac{a}{b}$
- ☐ $y_s(t) = Ke^{rt}$ avec $r = -\frac{a}{b}$

Dans une première étude la concentration en insecticide dans l'environnement pouvait être considérée comme constante et égale à : $f(t) = 12$ ppm. Les mesures ont permis d'attribuer des valeurs aux constantes a et b : $a = 10$ et $b = -2$.

Question 3 Donnez la valeur numérique de r

- ☐ $r = -0,2$
- ☐ $r = -5$
- ☐ $r = 5$
- ■ $r = 0,2$

Question 4 Donnez une solution particulière, $y_p(t)$, de l'équation avec second membre

- ☐ $y_p(t) = 6$
- ☐ $y_p(t) = -1,2$
- ■ $y_p(t) = -6$
- ☐ $y_p(t) = 1,2$

Question 5 Donnez la forme de la solution générale de l'équation (1) où C est une constante arbitraire

- ☐ $y(t) = y_s(t) - y_p(t)$
- ☐ $y(t) = y_s(t) + y_p(t) + C$
- ■ $y(t) = y_s(t) + y_p(t)$
- ☐ $y(t) = y_s(t) - y_p(t) + C$

Question 6 À partir de la solution générale de l'équation (1), quelle est la valeur de K sachant que la condition initiale est $y(0) = 0$?

- ☐ $K = 1,2$
- ☐ $K = -6$
- ■ $K = 6$
- ☐ $K = -1,2$

Question 7 En utilisant la solution générale de l'équation (1) et la valeur de K trouvée à la question précédente, calculez la valeur de y pour un individu âgé de 2 mois.

- ■ $2,95$
- ☐ $5,90$
- ☐ $0,590$
- ☐ $0,295$

Dans une deuxième étude la concentration en insecticide dans l'environnement est décrite par $f(t) = e^{0,5t}(3t+7)$. Le processus d'accumulation de l'insecticide dans l'organisme est alors décrit par l'équation différentielle suivante :

$$10\frac{dy(t)}{dt} - 2y(t) = e^{0,5t}(3t+7) \quad (2)$$

Question 8 Donnez la forme d'une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation (2)

- ☐ $y_p(t) = e^{t}(\beta t + \gamma)$
- ■ $y_p(t) = e^{0,5t}(\beta t + \gamma)$
- ☐ $y_p(t) = e^{t}(3t + 7)$
- ☐ $y_p(t) = e^{0,5t}(3t + 7)$

Question 9 Identifiez la solution particulière de l'équation (2)

- ☐ $y_p(t) = e^{0,5t}(2t + \frac{10}{3})$
- ■ $y_p(t) = e^{0,5t}(t - 1)$
- ☐ $y_p(t) = e^{0,5t}(at + b)$
- ☐ $y_p(t) = e^{0,5t}(3t + 7)$

Question 10 À partir de la solution générale de l'équation (2), quelle est la valeur de K sachant que la condition initiale est $y(0) = 0$?

- ☐ $K = 6$
- ■ $K = 1$
- ☐ $K = -7$
- ☐ $K = \frac{-10}{3}$

Question 11 En utilisant la solution générale de l'équation (2), et la valeur de K trouvée à la question précédente, calculez la valeur de y pour un individu âgé de 2 mois

☐ $4,72$ ☐ $7,94$ ■ $4,21$ ☐ $7,32$

Question 12 On désire étudier le sens de variation de la fonction $y(t)$ qui est la solution générale de l'équation (2) avec la valeur de K trouvée à la question 10. Quelle est la dérivée de cette fonction ?

☐ $\frac{dy(t)}{dt} = \frac{-20}{3}e^{0,2t} + 0,5e^{0,5t}(1,5t+6,5)$
☐ $\frac{dy(t)}{dt} = 0,2e^{0,2t} + 0,5e^{0,5t}(t-1)$
■ $\frac{dy(t)}{dt} = 0,2e^{0,2t} + 0,5e^{0,5t}(t+1)$
☐ $\frac{dy(t)}{dt} = -1,4e^{0,2t} + e^{0,5t}(1,5t+6,5)$

2 Deuxième partie

Un entomologiste doit conduire une étude sur un insecte ravageur, la pyrale du maïs *Ostrinia nubilalis* (Lépidoptère). La première expérience a consisté à échantillonner 200 plants de maïs dans un champ cultivé de 500 000 plants afin d'estimer la distribution du nombre de larves (chenilles) de pyrale par plant. Le chercheur désirait obtenir un maximum de plants infestés par l'insecte et pour cela il a utilisé un indice morphologique (trou dans la tige du plant) sensé indiquer qu'au moins une larve de pyrale avait pénétré dans la tige du maïs (afin d'être sûr que la plupart des plants de son échantillon serait infesté par l'insecte).

Question 13 La stratégie d'échantillonnage utilisée par le scientifique vous parait :

☐ Bonne car la taille de l'échantillon est supérieure à 30
■ Mauvaise car chaque plant de maïs du champ n'avait pas la même probabilité d'être prélevé
☐ Mauvaise car tous les plants du champ n'ont pas été analysés
☐ Bonne car chaque plant de maïs du champ avait la même probabilité d'être prélevé

Question 14 Quelle est la variable aléatoire à étudier ?

☐ Variable discrète : nombre de plants sains
☐ Variable continue : nombre de larves par plant
■ Variable discrète : nombre de larves par plant
☐ Variable continue : nombre de plants sains

Les données obtenues sont résumées dans le tableau suivant :

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9	Total
n	6	15	40	42	37	30	10	12	8	0	200
nx	0	15	80	126	148	150	60	84	64	0	727

Avec X : nombre de larves par plant et n = nombre de plants infestés par x larves. Pour optimiser la lutte contre ce ravageur, le chercheur voudrait savoir comment les larves sont réparties. Pour cela, il teste si la distribution de X suit une loi de probabilité caractérisée par un seul paramètre (moyenne=variance).

Question 15 Quelle est la bonne formulation de l'hypothèse nulle associée au test qu'il a utilisé ?

■ La distribution de X dans le champ étudié suit une loi de Poisson
☐ La distribution de X dans l'échantillon suit une loi de Bernoulli
☐ La distribution de X dans l'échantillon suit une loi de Poisson
☐ La distribution de X dans le champ étudié suit une loi de Bernoulli

Question 16 Quelle est la moyenne de la distribution observée dans l'échantillon ?

☐ $3,43$ ☐ $3,45$ ☐ $3,53$ ■ $3,63$

Question 17 Sachant que pour la suite de nos calculs on a arrondi la moyenne de la distribution observée à la valeur $3,5$, quelle est la valeur de la probabilité attendue sous H_0 pour $X = 0$?

☐ $P(X = 0) = 0,1020$ ☐ $P(X = 0) = 0,0042$
■ $P(X = 0) = 0,0302$ ☐ $P(X = 0) = 0,0502$

Question 18 Le nombre de plants non infestés ($X = 0$) attendu sous l'hypothèse nulle est obtenu en multipliant $P(X = 0)$ par :

☐ 927 ■ 200 ☐ 6 ☐ 727

L'ensemble des effectifs observés, n, et théoriques, n_t (= attendus sous H_0) est indiqué dans le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	≥ 9
n	6	15	40	42	37	30	10	12	8	0
n_t	6,04	21,14	37	43,16	37,76	26,44	15,42	7,7	3,38	1,96

Question 19 Quelle est la valeur observée de la statistique, χ^2_{obs}, du test ?

☐ $15,18$ ☐ $20,18$ ☐ $6,18$ ■ $8,18$

Question 20 Combien de paramètres avons-nous dû estimer pour calculer les probabilités attendues sous H_0 ayant permis de calculer les effectifs théoriques ?

☐ 0 ☐ 2 ☐ 3 ■ 1

Question 21 Quelle est le nombre de degrés de liberté (ddl) associé à la valeur seuil de la statistique utilisée ?

☐ 6 ☐ 9 ☐ 8 ■ 7

Question 22 En choisissant un risque $\alpha = 0,01$ quelle est la valeur théorique de la statistique du test utilisé ?

☐ $20,09$ ■ $18,48$ ☐ $21,67$ ☐ $16,81$

Question 23 Conclusion statistique à l'issue de votre test ?

☐ Rejet de H_0 avec un risque β inconnu
☐ Rejet de H_0 avec un risque α égal à $0,01$
☐ Non rejet de H_0, avec un risque β égal à $0,01$
■ Non rejet de H_0, avec un risque β inconnu

Question 24 Conclusion biologique à l'issue de votre test ?

☐ Les données observées ne sont pas compatibles avec une distribution des larves/plant dans le champ étudié qui suivrait une loi de Poisson
☐ Les données observées ne sont pas compatibles avec une distribution des larves/plant dans le champ étudié qui suivrait une loi de Bernoulli
■ Les données observées sont compatibles avec une distribution des larves/plant dans le champ étudié qui suivrait une loi de Poisson
☐ Les données observées sont compatibles avec une distribution des larves/plant dans le champ étudié qui suivrait une loi de Bernoulli

Question 25 Les conclusions des 2 questions précédentes vous paraissent-elles :

☐ Non critiquables car la taille de l'échantillon est supérieure à 30
☐ Non critiquables car l'échantillonnage est représentatif de la population étudiée

- ☐ Critiquables car l'échantillonnage réalisé surestime le nombre de plants sains (non attaqué par l'insecte)
- ■ Critiquables car l'échantillonnage réalisé sous-estime le nombre de plants sains (non attaqué par l'insecte)

3 Troisième partie

Afin d'optimiser le dosage de l'insecticide à utiliser pour lutter contre la pyrale du maïs, le chercheur a pour objectif d'estimer le poids moyen (en mg) des larves à partir d'un échantillon de taille $n = 10$. Il obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 200 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = 100000$$

Question 26 Quelles sont les estimations de la moyenne et de l'écart-type du poids des larves dans le champ ?

- ☐ $\mu = 20,0$; $\sigma = 10,54$
- ☐ $\mu = 20,10$; $s = 10,00$
- ☐ $\bar{x} = 20,10$; $s = 10,54$
- ■ $\hat{\mu} = 20,0$; $\hat{\sigma} = 10,54$

Question 27 Imaginons que l'on prélève un nombre élevé d'échantillons aléatoires simples de taille égale à celle de l'échantillon de l'étude. Parmi les formulations suivantes, laquelle est exacte ?

- ☐ Toutes les estimations sont égales entre elles mais différentes de la moyenne de la population
- ■ Toutes les estimations sont différentes entre elles mais en moyenne proches de la moyenne de la population
- ☐ Toutes les estimations sont égales entre elles et identiques à la moyenne de la population
- ☐ Toutes les estimations sont différentes entre elles et en moyenne très différentes de la moyenne de la population

Pour intégrer la fluctuation d'échantillonnage dans l'analyse, on calcule un intervalle de confiance (niveau de confiance = 0,99 soit $\alpha = 0,01$).

Question 28 Que vaut cet intervalle de confiance ?

- ■ $[9,17 \; ; \; 30,83]$
- ☐ $[13,47 \; ; \; 26,53]$
- ☐ $[12,46 \; ; \; 27,54]$
- ☐ $[9,72 \; ; \; 30,38]$

Question 29 Comment interprétez-vous cet intervalle de confiance ?

- ■ μ a 99 % de chances de se trouver dans cet intervalle
- ☐ μ a 1 % de chances de se trouver dans cet intervalle
- ☐ μ a 95 % de chances de se trouver dans cet intervalle
- ☐ μ a 0,5 % de chances de se trouver dans cet intervalle

Question 30 Conclusion

- ☐ L'intervalle de confiance a 5 % de chance de contenir la valeur du poids moyen des larves de la population attaquant le champ cultivé
- ☐ L'intervalle de confiance a 1 % de chance de contenir la valeur du poids moyen des larves de la population attaquant le champ cultivé
- ■ L'intervalle de confiance a 99 % de chance de contenir la valeur du poids moyen des larves de la population attaquant le champ cultivé
- ☐ L'intervalle de confiance a 95 % de chance de contenir la valeur du poids moyen des larves de la population attaquant le champ cultivé

Question 31 En gardant le même niveau de confiance que ci-dessus, comment faire pour diminuer la marge d'erreur de l'estimateur de la moyenne μ (= moyenne de la population) ?

- ☐ Augmenter σ l'écart-type du poids des larves de la population
- ■ Augmenter n, la taille de l'échantillon
- ☐ Augmenter l'erreur standard de l'estimateur de la moyenne μ
- ☐ Réduire n, la taille de l'échantillon

4 Quatrième partie

Le dernier objectif de l'étude est de savoir (au risque $\alpha = 0,05$) si le poids moyen des larves d'une seconde population de pyrale du maïs infestant un autre champ est égale ou différente de celle de la population infestant le premier champ (indiqué dans les parties précédentes). On indique que la longueur moyenne calculée à partir de l'échantillon prélevé dans le second champ (de taille $n = 10$) est égale à 25 mm.

Question 32 Quel test doit-on réaliser ?

- ☐ Test d'égalité de 2 moyennes avec $H_0 \ : \ \bar{x}_1 = \bar{x}_2$
- ■ Test d'égalité de 2 moyennes avec $H_0 \ : \ \mu_1 = \mu_2$
- ☐ Test de conformité de moyenne avec $H_0 \ : \ \mu = \mu_0$
- ☐ Test de conformité de moyenne avec $H_0 \ : \ \bar{x} = \mu_0$

Question 33 En sachant que des tests ont permis de considérer que les hypothèses d'homoscédasticité et de normalité étaient acceptables, quelle statistique de test doit-on utiliser pour comparer les 2 longueurs moyennes ?

- ☐ Une statistique qui, sous H_0, suit une loi normale réduite et intègre les variances des 2 populations
- ☐ Une statistique qui, sous H_0, suit une loi de Poisson et intègre les variances des 2 populations
- ☐ Une statistique qui, sous H_0, suit une approximativement une loi normale réduite et intègre les estimations des variances des 2 populations
- ■ Une statistique qui, sous H_0, suit une loi de Student et intègre l'estimation d'une variance commune

Question 34 Sachant qu'on a obtenu une valeur absolue de la statistique calculée inférieure à celle de la valeur seuil (=théorique), quelle est la conclusion du test :

- ☐ Le poids moyen des larves varie entre les deux populations avec un risque de se tromper de 5 %
- ☐ Le poids moyen de larves est le même dans les deux populations avec un risque β de se tromper de 5 %
- ☐ Le poids moyen des larves varie entre les deux échantillons avec un risque de se tromper de 5 %
- ■ On n'a pas réussi à mettre en évidence de différence de poids moyen de larves entre les deux populations : H_0 n'est pas rejetée, avec un risque β inconnu

Question 35 Avez-vous confiance dans votre conclusion à la question précédente ?

- ☐ Oui car la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse est probablement faible en raison d'une forte variance et d'une faible taille d'échantillon
- ☐ Non car la puissance du test est probablement trop élevée en raison d'une grande variance et d'une faible taille d'échantillon
- ■ Non car la puissance du test réalisé est probablement trop faible en raison d'une grande variance et d'une faible taille d'échantillon
- ☐ Oui car la probabilité de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse est probablement élevée en raison d'une forte variance et d'une faible taille d'échantillon

- Fin du sujet -