Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
Mercredi 20 décembre 2017
Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en **noir** : □ → ■.
— Ne pas utiliser de crayon à papier.
— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0	□0
□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1	□1
□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2	□2
□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3	□3
□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4	□4
□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5	□5
□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6	□6
□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7	□7
□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8	□8
□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9	□9

1 Analyse

On désigne par $N(t)$ la densité d'une population animale au temps t ($N(t) > 0$). La quantité $\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt}$ représente le taux de croissance par individu dans cette population. La dynamique de la population peut alors être modélisée par l'équation générale (E) suivante :

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t)) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = N(t)f(N(t))$$

où f est une fonction réelle de la variable réelle $N(t)$.

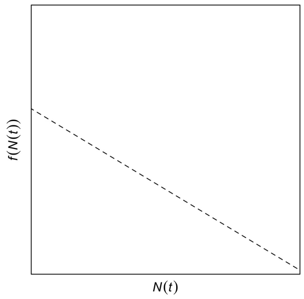
1.1 Croissance exponentielle

Sous l'hypothèse du modèle de Malthus (1798), la fonction f s'écrit de la manière suivante :

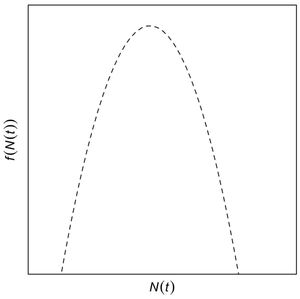
$$f(N(t)) = r$$

avec $r \in \mathbb{R}^{*+}$.

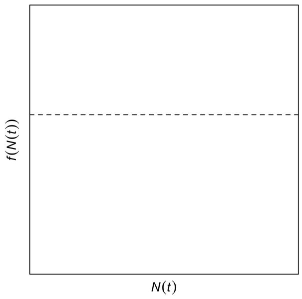
Question 1 Parmi les figures ci-dessous laquelle correspond à la représentation graphique de f en fonction de $N(t)$?



☐



☐



■

Question 2 Quelle est la solution de l'équation (E) pour la condition initiale $N(0) = N_0$?

☐ $N(t) = N_0 - rt$ ☐ $N(t) = N_0 e^{-rt}$
■ $N(t) = N_0 e^{rt}$ ☐ $N(t) = N_0 + rt$

Question 3 Quelle est la limite de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

■ $+\infty$ ☐ 0
☐ r ☐ N_0

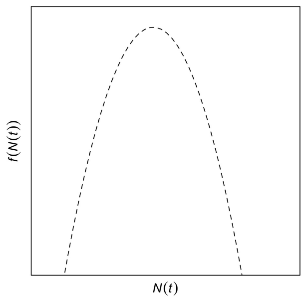
1.2 Croissance logistique

Sous l'hypothèse du modèle de Verhulst (1838), la fonction f s'écrit de la manière suivante :

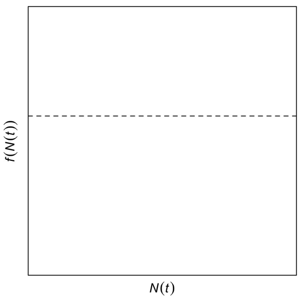
$$f(N(t)) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec $r, K \in \mathbb{R}^{*+}$.

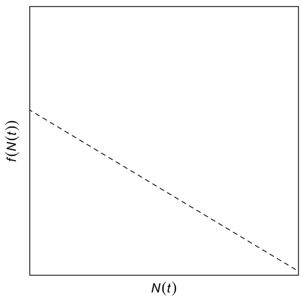
Question 4 Parmi les figures ci-dessous laquelle correspond à la représentation graphique de f en fonction de $N(t)$?



☐



☐



■

Question 5 L'équation $\frac{dN(t)}{dt} = N(t)f(N(t))$ est une équation différentielle ordinaire à variables séparables ?

☐ faux ■ vrai

Question 6 La quantité $\frac{1}{N(t)(1-N(t)/K)}$ peut s'écrire :

☐ $\frac{1}{KN(t)} + \frac{1}{1-N(t)}$ ■ $\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{K-N(t)}$
☐ $\frac{1}{N(t)} - \frac{1}{K-N(t)}$ ☐ $\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{1-N(t)/K}$

Question 7 Sous l'hypothèse du modèle de Verhulst, la solution générale de l'équation (E) s'écrit $N(t) = \frac{CK}{C+e^{-rt}}$ avec $C \in \mathbb{R}^{*+}$. La solution pour la condition initiale $N(0) = N_0$ est alors :

■ $N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$　　□ $N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 - (K - N_0)e^{-rt}}$

□ $N(t) = \frac{N_0}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$　　□ $N(t) = \frac{K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}}$

Question 8 Quelle est la limite de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

■ K　　□ 0

□ N_0　　□ $+\infty$

Question 9 Quelle est l'interprétation du paramètre K ?

□ Capacité de croissance　　■ Capacité limite

□ Taux de croissance　　□ Taux de prédation

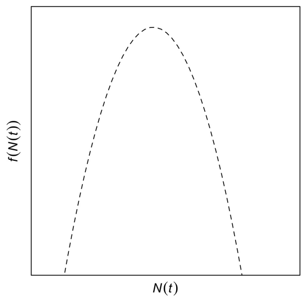
1.3 Croissance avec effet Allee

POUR certaines espèces, le taux de croissance par individu admet un maximum pour des valeurs intermédiaires. Par exemple, il peut être trop difficile de trouver des mâles lorsque $N(t)$ est petit, ou il peut y avoir trop de compétition pour les ressources lorsque $N(t)$ est grand. La fonction f s'écrit alors :

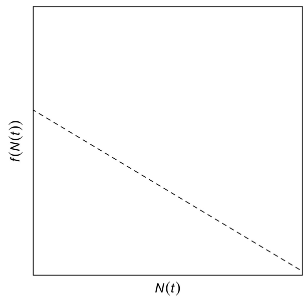
$$f(N(t)) = r\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)\frac{(N(t) - A)}{K}$$

avec $r, K, A \in \mathbb{R}^{*+}$ et $A < K$.

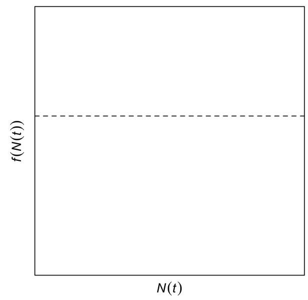
Question 10 Parmi les figures ci-dessous laquelle correspond à la représentation graphique de f en fonction de $N(t)$?



■



□



□

Question 11 Pour quelles valeurs de $N(t)$, la fonction f est-elle nulle ?

□ $N(t) = A/2$ et $N(t) = K$　　■ $N(t) = A$ et $N(t) = K$　　□ $N(t) = 0$ et $N(t) = K$

Question 12 Pour quelle valeur de $N(t)$, la fonction f est-elle maximale ?

□ $N(t) = \frac{A-K}{2}$　　■ $N(t) = \frac{A+K}{2}$　　□ $N(t) = \frac{K-A}{2}$

Question 13 De quel signe est $\frac{dN(t)}{dt}$ lorsque $N(t) < A$?

□ strictement positif

■ strictement négatif

Question 14 Si $N(0) < A$, quelle est la limite de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$?

□ r　　■ 0

□ $+\infty$　　□ N_0

2 Probabilités et statistiques

2.1 *Marmota marmota*

La dynamique dans une population de marmottes alpines (*Marmota marmota*) est notamment la résultante des processus de mortalité et de naissance. La mortalité hivernale est très dépendante des réserves de graisse accumulées pendant l'été et donc de la masse corporelle en début d'automne. Des données de masse corporelle (en kg) juste avant l'hibernation ont été récoltées et réparties en 5 classes de masse comme indiqué dans le tableau suivant :

Classes de masse corporelle	Effectifs observés	Effectifs théoriques
]3,800 ; 4,200]	74	77,11
]4,200 ; 4,600]	106	101,33
]4,600 ; 5,000]	152	147,59
]5,000 ; 5,400]	94	99,68
]5,400 ; 5,800]	81	81,39

On désire savoir si la variable étudiée suit une loi normale dont les paramètres ont été estimés à partir de la masse moyenne et la variance de cet échantillon.

Question 15 Quel type de test est utilisé ?

- ☐ Test d'indépendance
- ■ Test d'ajustement
- ☐ Test de conformité
- ☐ Test d'égalité

Question 16 Quelle loi suit la statistique du test sous l'hypothèse nulle ?

- ☐ Loi binomiale
- ☐ Loi de Poisson
- ■ Loi du χ^2
- ☐ Loi normale

Question 17 Quel est le nombre de degrés de liberté de cette statistique ?

- ☐ 5
- ☐ 3
- ■ 2
- ☐ 4

Question 18 Quelle est la valeur de la statistique observée ?

- ☐ 5,99
- ☐ -0,03
- ■ 0,798
- ☐ 1,96
- ☐ 9,49

Question 19 Quelle conclusion tirez-vous du test réalisé (α = 0,05) ?

- ■ On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la masse corporelle des marmottes suit une loi normale
- ☐ On ne peut pas considérer que la masse corporelle des marmottes alpines suit une loi normale
- ☐ On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la masse corporelle des marmottes alpines suit une loi de Poisson
- ☐ On ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle la masse corporelle des marmottes suit une loi du χ^2
- ☐ On ne peut pas considérer que la masse corporelle des marmottes alpines suit une loi du χ^2

Question 20 Quel est le risque associé à cette conclusion ?

- ■ β inconnu
- ☐ 0,95
- ☐ $1 - \beta$
- ☐ 0,05

2.2 Population de la Vanoise

La conclusion tirée de la partie précédente sera adoptée pour la suite. Un échantillon aléatoire simple de 26 adultes a été prélevé dans la population de la Vanoise juste avant l'entrée en hibernation et ces adultes ont été pesés. Dans cet échantillon, on calcule $\bar{x} = 4,825$ kg et $s^2 = 1,724$ kg^2, respectivement la moyenne et la variance de la masse corporelle.

Question 21 Quelle est la fonction densité de probabilité d'une loi normale quelconque ?

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$
- ☐ $\pi(a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-u^2}{2}} du$
- ■ $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$
- ☐ $\int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$

Question 22 Quelle est l'estimation ponctuelle, $\hat{\mu}$, de μ pour cette population ?

- ☐ $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- ☐ $\frac{n-1}{n} \bar{x}$
- ■ $\bar{x}$
- ☐ $\frac{n}{n-1} \bar{x}$

Question 23 Quelle est l'estimation ponctuelle, $\hat{\sigma}$, de l'écart-type de la population ?

- ☐ $1,724$
- ■ $\sqrt{1,793}$
- ☐ $\sqrt{1,724}$
- ☐ $1,793$

Question 24 Quel est l'intervalle de confiance à 0,95 (c'est-à-dire avec $\alpha = 0,05$) de μ ?

- ☐ [4,31 ; 4,80]
- ☐ [4,69 ; 4,42]
- ☐ [4,11 ; 4,99]
- ■ [4,28 ; 5,37]

Question 25 Quelle est l'interprétation biologique de cet intervalle de confiance ?

- ☐ L'intervalle de confiance a 5 % de chance de contenir la valeur moyenne μ pour la population
- ☐ Il y a 95 % de chance pour que la moyenne μ soit égale à 4,825
- ☐ On accepte l'hypothèse que μ = 4,825 kg avec un risque β inconnu
- ☐ On accepte l'hypothèse que l'intervalle de confiance contienne μ
- ■ L'intervalle de confiance a 95 % de chance de contenir la valeur moyenne μ de la population

Des pesées ont été effectuées sur un échantillon aléatoire simple de 19 marmottes issues de la population du Mercantour. On donne les éléments suivants : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 95$ et $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 509,01$. On désire savoir si on peut considérer que les masses moyennes dans les populations de Vanoise (μ_1) et du Mercantour (μ_2) sont identiques.

Question 26 Quelle proposition est nécessaire à l'application du test approprié ?

- ☐ Les effectifs doivent être grands (>30)
- ■ Les variables suivent une loi normale et les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont égales
- ☐ Les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont égales
- ☐ Les variables suivent une loi normale et les effectifs sont petits
- ☐ Les variances dans les deux populations (respectivement σ_1^2 et σ_2^2) sont connues

Question 27 Quelle est la valeur absolue de la statistique observée ?

- ☐ -0,44
- ☐ 1,05
- ☐ 24,04
- ■ 0,43

Question 28 Quelle conclusion ($\alpha = 0,05$) tirez-vous du test réalisé à la question précédente ?

- ☐ Les moyennes des deux échantillons sont différentes
- ☐ On ne peut pas conclure avec un risque β inconnu
- ■ On ne peut pas conclure que les moyennes des deux populations sont différentes
- ☐ On ne peut pas conclure que les moyennes des deux échantillons sont différentes

2.3 Femelles gestantes et dominantes

Dans la population de Vanoise, la probabilité qu'une femelle adulte soit gestante est égale à 0,20. La probabilité qu'une femelle adulte soit dominante est égale à 0,28. La probabilité qu'une femelle dominante soit gestante est égale à 0,66.

Question 29 Que dire des événements « être une femelle gestante » et « être une femelle dominante » d'un point de vue probabiliste ?

- ☐ Ils sont indépendants
- ☐ On ne peut pas savoir s'ils sont indépendants ou non
- ■ Ils ne sont pas indépendants
- ☐ Ils sont incompatibles

Question 30 Quelle est la probabilité qu'une femelle adulte soit gestante et dominante ?

☐ 0,1320 ☐ 0,4242 ■ 0,1848 ☐ 0,3030

Question 31 Quelle est la probabilité qu'une femelle soit dominante si elle est gestante ?

☐ 0,040 ☐ 0,093 ☐ 0,519 ■ 0,924

On a pesé 63 femelles gestantes, prélevées de façon aléatoire et simple dans la population de la Vanoise. Dans cet échantillon, la masse moyenne des femelles gestantes était de 4,628 kg et l'écart-type de 1,349 kg. On sait, par ailleurs, que la masse des femelles gestantes de *Marmota marmota* est une variable normale dont l'écart-type est de 1,55 kg. On voudrait savoir si on peut considérer que la masse moyenne des femelles gestantes dans la population de la Vanoise est égale à 4,755 kg (moyenne théorique de référence pour les femelles gestantes de *Marmota marmota*). On ne peut pas ici rejeter l'hypothèse d'égalité des deux écart-types.

Question 32 Quelle est l'hypothèse nulle que vous allez formuler ?

- ☐ H_0 : La masse moyenne des femelles gestantes dans l'échantillon est égale à la masse théorique de 4,755 kg
- ■ H_0 : La masse moyenne des femelles gestantes dans la population est égale à la masse théorique de 4,755 kg
- ☐ H_0 : La masse moyenne des femelles gestantes dans la population est égale à la masse de 4,628 kg
- ☐ H_0 : La masse moyenne des femelles gestantes dans la population n'est pas égale à la masse théorique de 4,755 kg
- ☐ H_0 : La masse moyenne des femelles gestantes dans l'échantillon n'est pas égale à la masse de 4,628 kg

Question 33 Sous l'hypothèse nulle, quelle est la distribution de l'estimateur de la masse moyenne des femelles de deux ans ?

- ☐ Une loi normale de paramètres $(4,628,\ \sqrt{\frac{1,349}{62}})$
- ☐ Une loi normale de paramètres $(4,755,\ \sqrt{\frac{1,55}{63}})$
- ■ Une loi normale de paramètres $(4,755,\ \sqrt{\frac{1,55^2}{63}})$
- ☐ Une loi normale de paramètres $(4,628,\ 1,349)$
- ☐ Une loi normale de paramètres $(4,755,\ \sqrt{\frac{1,349^2}{62}})$

Question 34 Quelle est la valeur absolue de la statistique observée ?

☐ 0,861 ☐ 0,809 ☐ 0,741 ■ 0,650

Question 35 Quelle est la valeur seuil de rejet de la statistique ($\alpha = 0{,}02$) ?

☐ 0,83 ☐ 1,96 ☐ 0,75 ■ 2,326

Question 36 Quelle est la probabilité de vous tromper dans votre conclusion ?

- ☐ La probabilité est égale à 0,02
- ☐ La probabilité est égale à 0,05
- ☐ La probabilité est égale à 0,98
- ☐ La probabilité est inconnue et égale à $1 - \beta$, la puissance du test
- ■ On ne connait pas la valeur de cette probabilité, il s'agit de β, risque de deuxième espèce
- ☐ La probabilité est égale à 0,95

- Fin du sujet -