Mathématiques pour les Sciences de la Vie
CC1
Lundi 26 octobre 2015
Durée 90 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous sera sanctionnée par un retrait de points.

— Pour cocher une case, remplissez-la en noir (■) ;
— Utilisez un stylo noir ;
— Pour corriger, gommez ou effacez la case avec du correcteur blanc ;
— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

....

Numéro d'étudiant :

....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Partie 1 : Questionnaire à choix multiples (8 points)

Soit la fonction $f(x) = \frac{3x^2-x-3}{x-2}$.

Question 1 Quel est le domaine de définition de f ?

- ☐ $\mathbb{R}\setminus\{2\}$
- ☐ $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-5}{3}\right\}$
- ☐ $\mathbb{R}^{\star+}$
- ☐ $\mathbb{R}^{\star}$

Question 2 Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

- ☐ f n'a pas de limite définie en $+\infty$
- ☐ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ 3

Question 3 On peut écrire $f(x) = ax + b + \frac{7}{x-2}$. Calculez a et b :

- ☐ $a = 3, b = 1$
- ☐ $a = 1, b = 3$
- ☐ $a = 1, b = 5$
- ☐ $a = 3, b = 5$

Question 4 Avec les notations précédentes, la courbe représentative de la fonction f a :

- ☐ Une asymptote horizontale d'équation $y = b$.
- ☐ Aucune asymptote.
- ☐ Une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$.
- ☐ Une asymptote verticale d'équation $x = a$.

Question 5 Laquelle de ces fonctions est une primitive de f ?

- ☐ $x^2 + 3x - 7\ln|x| + C$, $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $\frac{3}{2}x^2 + 5x + 7\ln|x-2| + C$, $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $x^2 + 5x + 7\ln|x-2| + C$, $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 7\ln|x+2| + C$, $C \in \mathbb{R}$

Soit la fonction $g(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

Question 6 La fonction derivée de g vaut :

- ☐ $g'(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$
- ☐ $g'(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}$
- ☐ $g'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$
- ☐ $g'(x) = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$

Question 7 La fonction g admet un extremum en :

- ☐ $x = 0$
- ☐ $x = -1$
- ☐ $x = 1$
- ☐ La fonction g n'admet aucun extremum.

Question 8 La courbe représentative de la fonction g admet un ou des points d'inflexion en :

- ☐ $x = -1$ et $x = 0$
- ☐ $x = 0$ et $x = 1$
- ☐ $x = -1$ et $x = 1$
- ☐ $x = 0$ uniquement

Partie 2 : Cycle de vie de l'aleurode des serres (14 points)

L'aleurode des serres, *Trialeurodes vapurarium*, est un insecte qui s'attaque aux cultures en serres. Son cycle de vie comporte plusieurs stades mais pour pouvoir lutter contre ce ravageur, il est important d'identifier les effectifs dans les stades larvaires et adultes. On note $L(t)$ la quantité de larves présentes à l'instant t et $N(t)$ la quantité d'adultes à l'instant t. On suppose qu'il y a L_0 larves et aucun adulte présent à $t = 0$. On fait également l'hypothèse qu'il n'y a pas de mortalité des larves au cours du temps (hypothèse peu réaliste mais pratique ici). Les larves se transforment en adultes avec un taux k ($k > 0$) et les adultes meurent avec un taux λ ($\lambda > 0$). On considérera $k > \lambda$. Les processus peuvent être formalisés par les équations suivantes :

$$\frac{dL}{dt} = -kL \qquad (1)$$

$$\frac{dN}{dt} = kL - \lambda N \qquad (2)$$

Question 9 Donnez les variables et les paramètres des équations (1) et (2). ☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐**1**

Question 10 Expliquez pourquoi l'équation (1) est une équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables. Séparez les variables (on ne demande pas ici la résolution). ☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐**1**

Question 11 Donnez la solution générale de l'équation (1). ☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$

Question 12 Donnez la solution de l'équation (1) telle que $L(0) = L_0$. ☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐**1**

Question 13 En remplaçant L dans l'équation (2) par votre solution à la question 12, montrez que l'équation (2) peut être réécrite sous la forme :

$$\frac{dN}{dt} = kL_0e^{-kt} - \lambda N \quad (3)$$

☐**0** ☐$\frac{1}{2}$

Question 14 Montrez que la solution de l'équation sans second membre associée à l'équation (3) est de la forme :

$$N(t) = Ce^{-\lambda t} \text{ avec } C \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$

Question 15 Une solution particulière de l'équation (3) est de la forme $N(t) = Ae^{-kt}$ avec $A \in \mathbb{R}$.Calculez A.

☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐**2**

Question 16 Donnez l'expression finale de la solution de l'équation (3).

☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐**1**

Question 17 En déduire l'expression de $N(t)$ respectant la condition initiale donnée dans l'énoncé.

☐**0** ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐**2**

Question 18 Quelle est la limite, N_∞, de $N(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?

☐ **0** ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ **1**

Question 19 Que signifie d'un point de vue biologique la valeur de N_∞ ? Est-ce réaliste ? Quel phénomène biologique non pris en compte par le modèle pourrait expliquer cette situation ?

☐ **0** ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ **1**