A6-EDO (test1)

Ce test de 12 questions va vous permettre d'évaluer vos connaissances sur les équations différentielles (chapitre 6 du cours d'analyse de Sandrine Charles).
Il n'y a qu'une seule réponse juste.
Vous aurez besoin de quoi écrire, ces questions nécessitant de faire des calculs.

1.

Une des trois affirmations est fausse, cochez-la.

$$y' = \frac{1}{x}$$

- ○ est une équation différentielle du premier ordre
- ○ est intégrable
- ● admet une seule solution   Non, infinité de solutions

2.

Une des trois affirmations est fausse, cochez-la.

$y' - 3y - x^3 = 0$

est une équation différentielle

- ○ linéaire
- ○ du premier ordre
- ● sans second membre   Non : $\frac{dy}{dx} - 3y = x^3$ ← second membre

3.

Cocher la seule équation différentielle du deuxième ordre linéaire à coefficients constants :

- ● $y'' + 2y' - y = \cos x$
- ○ $2y' - y^2 = x$
- ○ $y'' = y'y$

4.

Cocher la seule équation différentielle du premier ordre à variables séparables

- ○ $\dfrac{y''}{y-1} = e^x$
- ● $y' = (e^x + 3)(y^4 - 1)$ $\frac{dy}{dx} = (e^x+3)(y^4-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{y^4-1} = (e^x+3)\,dx$
- ○ $y' = \dfrac{x^2 - y}{y^3 - 2x}$

5.

Résoudre $y' = \dfrac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = Kx \quad , K = \pm e^{c}$$

- ○ $y = \ln(x) + C$
- ○ $y = K \ln(x)$
- ○ $y = x + C$
- ● $y = K x$
- ○ $y = \exp(x) + C$
- ○ $y = K \exp(x)$

6.

Résoudre $y' = 2y$

$$\frac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx \Leftrightarrow \ln|y| = 2x + c_1 \,, c_1 \in \mathbb{R}$$

$$y = Ce^{2x} \quad , C = \pm e^{c_1}$$

- ○ $y = C \ln(2x)$
- ○ $y = C x$
- ● $y = C \exp(2x)$

7.

La solution de $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 - x$ est $y = x^3 - x^2 + Kx$

$$y' = 3x^2 - 2x + K$$

$$3x^2 - 2x + K - \frac{x^3 - x^2 + Kx}{x} = 2x^2 - x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - x = 2x^2 - x \quad \text{VRAI}$$

- ● Vrai
- ○ Faux

8.

f est solution de l'équation différentielle

$y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2 - x$

avec pour condition initiale $f(1)=0$ $\Rightarrow$

$$f(x) = x^3 - x^2 + Kx$$

$$0 = 1 - 1 + K$$

$$0 = K$$

- ○ $f(x) = 2x^2 - 2$
- ○ $f(x) = x^3 - x^2 + x$
- ● $f(x) = x^3 - x^2$

9.

Résoudre $y' - 2y = e^{2x}x^2$

SGSSM $\dfrac{dy}{dx} = 2y \Leftrightarrow y = Ke^{2x}$

SPASM MVC $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dK}{dx} e^{2x} + K2e^{x}$

$$\frac{dK}{dx} e^{2x} + 2Ke^{2x} - 2Ke^{2x} = e^{2x}x^2$$

$$\Leftrightarrow \int dK = \int x^2 dx \quad K = \frac{x^3}{3}$$

SOL $y = Ke^{2x} + \dfrac{x^3}{3} e^{2x}$

- ● $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + K\right)e^{2x}$
- ○ $y = e^{2x} + \dfrac{x^3}{3} + K$
- ○ $y = e^{2x}\dfrac{x^3}{3} + K$

10.

Résoudre $y' - 2y = \cos x$

- ○ $y = Ce^{2x} \cos x$
- ● $y = Ce^{2x} + \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x)$
- ○ $y = Ce^{2x}(-2\cos x + \sin x)$

SGSSM $y = C e^{2x}$

SPASM $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

mb $y = \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x)$

SOL $C e^{2x} + \frac{1}{5}(-2\cos x + \sin x)$

11.

Résoudre $y'' + \omega^2 y = 0$

- ● $y = C_1 \sin(\omega x) + C_2 \cos(\omega x)$
- ○ $y = C_1 \exp(\omega x) + C_2 \exp(-\omega x)$
- ○ $y = \exp(\omega x)(C_1 x + C_2)$

cf. cours

12.

Résoudre $y'' + 3y' = 0$

avec les conditions initiales $y'(0) = -3, y(0) = 0$

- ● $y = e^{-3x} - 1$
- ○ $y = -e^{-3x}$
- ○ $y = x^2 - 3x$

$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{3dy}{dx} = 0$; $z = \frac{dy}{dx}$

$\frac{dz}{dx} + 3z = 0 \Rightarrow y' = z = K e^{-3x}$

$y = -\frac{1}{3} K e^{-3x} + C$

C.I. mb $K = -3$ et $C = -1$