

Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
Jeudi 11 mai 2017
Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

— Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo à bille en noir : $\square \rightarrow \blacksquare$.

— Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex[®]).

— N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.

— Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.

— Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

.....
 Numéro d'étudiant :

.....

$\square 0 \square 0 \square 0 \square 0 \square 0 \square 0 \square 0 \square 0$
 $\square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1 \square 1$
 $\square 2 \square 2 \square 2 \square 2 \square 2 \square 2 \square 2 \square 2$
 $\square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3 \square 3$
 $\square 4 \square 4 \square 4 \square 4 \square 4 \square 4 \square 4 \square 4$
 $\square 5 \square 5 \square 5 \square 5 \square 5 \square 5 \square 5 \square 5$
 $\square 6 \square 6 \square 6 \square 6 \square 6 \square 6 \square 6 \square 6$
 $\square 7 \square 7 \square 7 \square 7 \square 7 \square 7 \square 7 \square 7$
 $\square 8 \square 8 \square 8 \square 8 \square 8 \square 8 \square 8 \square 8$
 $\square 9 \square 9 \square 9 \square 9 \square 9 \square 9 \square 9 \square 9$

Les quatre parties sont indépendantes.

1 Première partie

Avant une greffe de cornée, la cornée prélevée est plongée dans un liquide physiologique afin de provoquer l'évacuation du surplus d'eau contenu dans le tissu. On étudie l'évolution dans le temps de l'épaisseur de la cornée. Les deux sous-parties peuvent être traitées de façon indépendante.

1.1 Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad 1,22 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 632$$

où $y(t)$ est une fonction inconnue de la variable t , définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et $\frac{dy(t)}{dt}$, la fonction dérivée de $y(t)$. On admet que la fonction correspondant à l'épaisseur de la cornée, exprimée en micromètres, en fonction du temps, exprimé en heures, vérifie l'équation différentielle (E) .

Question 1 Quelle est la nature de l'équation (E) ?

- Une EDO d'ordre 1 linéaire à coefficients constants sans second membre
 Une EDO d'ordre 1 homogène
 Une EDO d'ordre 1 linéaire à coefficients constants avec second membre

Question 2 Déterminez les solutions $y_0(t)$ de l'équation $(E_0) \quad : \quad 1,22 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0$.

- $y_0(t) = K e^{t/1,22}$, $K \in \mathbb{R}$

- $y_0(t) = Ke^{-t/1,22}, K \in \mathbb{R}$
 $y_0(t) = Ke^{1,22t}, K \in \mathbb{R}$
 $y_0(t) = Ke^{-1,22t}, K \in \mathbb{R}$

Question 3 Déterminez une solution particulière $y_p(t)$ de l'équation (E), définie sur $[0; +\infty[$.

- $y_p(t) = 632$
 $y_p(t) = t/632$
 $y_p(t) = 983$
 $y_p(t) = 632t$

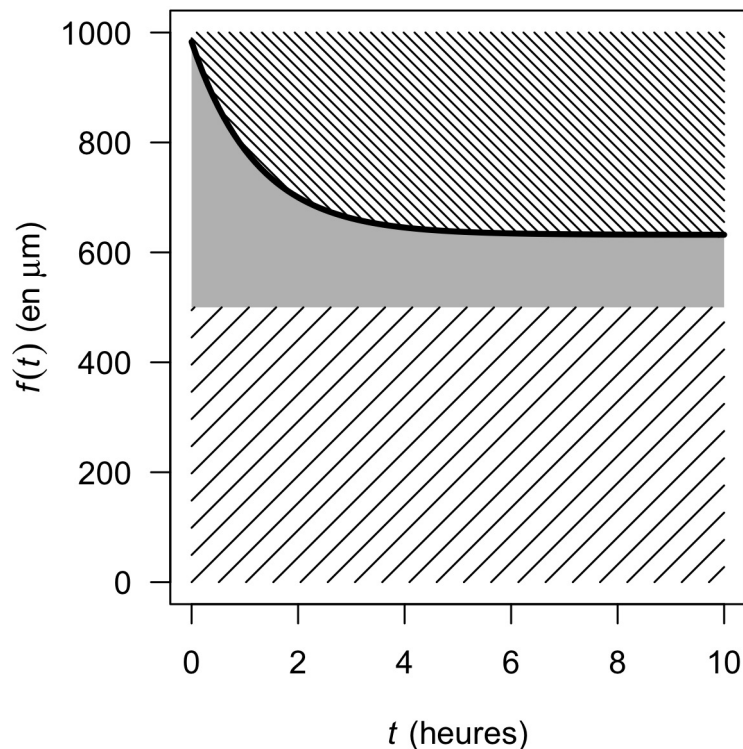
Question 4 Déterminez les solutions générales $y(t)$ de l'équation (E).

- $y(t) = 983 + Ke^{-t/1,22}, K \in \mathbb{R}$
 $y(t) = 632e^{-t/1,22}, K \in \mathbb{R}$
 $y(t) = 632 + Ke^{1,22t}, K \in \mathbb{R}$
 $y(t) = 632 + Ke^{-t/1,22}, K \in \mathbb{R}$

Question 5 Déterminez la solution $f(t)$ de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 983$.

- $f(t) = 632 - 351e^{t/1,22}$
 $f(t) = 632 + 983e^{-t/1,22}$
 $f(t) = 632 + 351e^{-t/1,22}$
 $f(t) = 351 - 632e^{t/1,22}$

Sur la figure ci-dessous, la courbe en trait plein noir représente la fonction $f(t)$.



Question 6 A quelle zone hachurée sur la figure ci-dessus correspond la quantité $\int_0^{10} f(t) dt$?

-  +  + 
  + 

Question 7 Quelle est l'expression de la valeur moyenne de $f(t)$ sur 10h ?

$\frac{1}{10} \int_0^{10} f(t) dt$

$10 \int_0^{10} f(t) dt$

$\int_0^5 f(t) dt$

$\int_0^{10} f(t/10) dt$

1.2 Étude d'une fonction

Lors d'une étude expérimentale ayant permis de mesurer l'épaisseur de la cornée au cours du temps, on s'est aperçu que la fonction $f(t)$ ci-dessus ne permettait pas de décrire exactement les observations. La fonction suivante, définie sur \mathbb{R} et étudiée sur $[0; +\infty[$, s'avère en fait plus appropriée :

$$g(t) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{1 + 16t^4}$$

avec α et β deux paramètres réels strictement positifs. On suppose $\alpha < \beta$.

Question 8 La fonction g est :

 impaire

 paire

 ni paire, ni impaire

Question 9 Que vaut $g(0)$?

 $\alpha + \beta$
 β
 0

 α

Question 10 Que vaut $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$?

 α
 0

 $\alpha + \beta$
 β

Question 11 La courbe représentative de $g(t)$ admet une asymptote en $+\infty$ dont l'équation est :

 $y = 0$
 $t = \alpha$
 $t = 0$
 $y = \alpha$

Question 12 Quelle est la dérivée de $g(t)$?

$g'(t) = \frac{64(\alpha - \beta)t^2}{(1 + 16t^4)^3}$

$g'(t) = 64(\alpha - \beta) - \frac{t^3}{(1 + 16t^4)^2}$

$g'(t) = 64(\alpha - \beta) \ln(1 + 16t^4)$

$g'(t) = \frac{64(\alpha - \beta)t^3}{(1 + 16t^4)^2}$

Question 13 Que vaut $g'(\frac{1}{2})$?

$\frac{\alpha - \beta}{2}$

$2(\alpha + \beta)$

$\frac{\alpha + \beta}{2}$

$2(\alpha - \beta)$

Question 14 Quelle est le sens de variation de $g(t)$ sur $[0; +\infty[$?

 $g(t)$ est une fonction périodique

 $g(t)$ est une fonction décroissante

 $g(t)$ est une fonction croissante

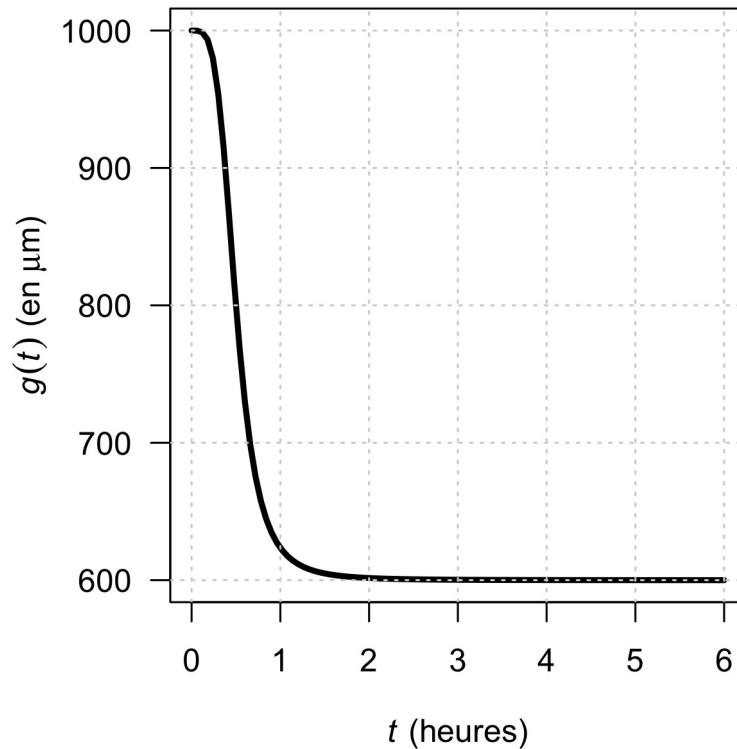
$g(t)$ est une fonction constante

Question 15 L'équation de la tangente à la courbe représentative de $g(t)$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est $y = \frac{\alpha+\beta}{2} + 2(\alpha - \beta)(t - \frac{1}{2})$.

Faux

Vrai

La figure ci-dessous montre la courbe représentative de la fonction $g(t)$.



Question 16 Déduisez de la courbe ci-dessus les valeurs des paramètres α et β .

$\alpha = 800, \beta = 800$

$\alpha = 800, \beta = 600$

$\alpha = 1000, \beta = 800$

$\alpha = 600, \beta = 800$

$\alpha = 1000, \beta = 600$

$\alpha = 600, \beta = 1000$

2 Deuxième partie

Pour une compagnie d'assurance, avoir des clients ayant un risque accru de développer certaines maladies et/ou d'avoir recours à certaines opérations chirurgicales représente une perte d'argent. Il est alors fréquent que les compagnies essaient de déterminer les facteurs associés à un risque plus élevé de développer certaines pathologies. Eventuellement, après un calcul complexe, la compagnie pourra utiliser ces résultats pour décider, ou non, d'augmenter les cotisations des clients les plus exposés au risque.

Dans cette optique, une compagnie d'assurance cherche à évaluer si les personnes portant des lentilles de contact (représentant 6 % de ses clients) présentent un risque accru de développer une maladie de la cornée conduisant à un besoin de greffe. En effet, le port de lentille peut occasionnellement induire une infection endommageant la cornée.

Sur l'ensemble de leurs clients opérés au cours de la dernière année, la compagnie choisit au hasard 200 personnes ayant subi une greffe de cornée et regarde ceux qui sont, ou non, porteurs de lentilles de contact :

Porteurs	Non Porteurs	Total
22	178	200

CORRECTION

Pour analyser ces données, nous réaliserons un test du χ^2 d'ajustement à la distribution théorique de la répartition des cas de greffe de cornée entre individus porteurs ou non de lentilles de contact sous l'hypothèse que la probabilité de développement d'une maladie justifiant cette opération est indépendante du port ou non de lentilles de contacts. Nous prendrons un risque de première espèce $\alpha = 0,05$.

Question 17 Quels sont les nombres de porteurs et non porteurs de lentilles de contacts attendus sous H_0 ?

- 100 et 100 0,12 et 0,88
 20 et 180 12 et 188

Question 18 Quelles sont les conditions d'application de ce test ?

- Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), effectif total ≥ 50 , effectifs théoriques ≥ 5
 Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), normalité, homoscedasticité
 Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), effectif total ≥ 50 , effectifs observés ≥ 5
 Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), normalité

Question 19 Que vaut la statistique associée à ce test ?

- 8,86 7,12
 9,54 6,14

Question 20 Quelle est la valeur seuil du χ^2 associée à ce test ?

- 3,841 5,991
 4,605 5,412

Question 21 Quelle conclusion statistique pouvez-vous tirer de ce test ? (remarque : même si vous n'avez pas su répondre aux deux questions précédentes, en examinant bien les différentes réponses qui y étaient proposées, vous devriez pouvoir facilement répondre à cette question)

- H_0 est rejetée avec un risque de première espèce α de 5 %
 H_0 est acceptée avec un risque de deuxième espèce β inconnu
 H_0 est acceptée avec un risque de première espèce α de 5 %
 H_0 est rejetée avec un risque de deuxième espèce β inconnu

Question 22 Quelle conclusion vous semble donc la plus pertinente du point de vue de la compagnie d'assurance ?

- Les porteurs de lentilles sont plus à risque de subir une greffe de cornée, mais ce risque plus élevé serait dû à une plus grande fragilité initiale de l'œil des personnes porteuses de lentilles et non des lentilles elles-mêmes
 Les données ne permettent pas de mettre en évidence que les porteurs de lentilles ont un risque de greffe différent des autres
 Les porteurs de lentilles ont le même risque de greffe que les autres
 Les porteurs de lentilles sont davantage exposés au risque de subir une greffe de cornée, quelle que soit l'origine de la maladie (lentilles elles-mêmes ou fragilité initiale de l'œil des personnes porteuses de lentilles)

3 Troisième partie

Cette partie reprend le contexte de la partie précédente en se focalisant cette fois sur les calculs de probabilité. La compagnie d'assurance décide d'extrapoler les données issues de l'échantillon à la population, c'est-à-dire qu'ils supposent que parmi l'ensemble de leurs clients, 11 % des personnes qui ont subi une greffe de cornée (événement noté G) sont des porteurs de lentilles de contact (événement noté L).

Question 23 En langage mathématique, comment interprétez-vous cette probabilité ?

- Probabilité de G sachant L = 0,11
- Probabilité de G inter L = 0,11
- Probabilité de L sachant G = 0,11
- Probabilité de G union L = 0,11

À partir de ce résultat, on peut calculer que la probabilité de subir une greffe de cornée est 1,94 fois plus élevée pour un porteur de lentille de contact que pour un non porteur (on ne demande pas de démontrer ce résultat mais de l'utiliser pour répondre à la question suivante).

Question 24 Sachant qu'un non porteur de lentille a une probabilité de 1 sur 1000 de développer au cours de sa vie une maladie justifiant une greffe de cornée, que vaut la probabilité de développer au cours de sa vie une maladie justifiant une greffe de cornée pour un individu pris au hasard dans la population des assurés de la compagnie d'assurance (c'est-à-dire qu'il porte des lentilles ou pas) ?

- 1,0234 10^{-3}
- 1,0564 10^{-3}
- 1,94 10^{-3}
- 10^{-3}

Question 25 Sur un échantillon de 1000 personnes ne portant pas de lentille de contact, quelle est la probabilité qu'au moins une personne développe une maladie justifiant une greffe de cornée au cours de sa vie ?

- 0,63
- 0,37
- 0,5
- 0,999

4 Quatrième partie

Les différents modes opératoires liés aux opérations de greffe de cornées peuvent différer par plusieurs critères : acuité visuelle récupérée, durée de récupération après l'opération, risque de rechute, ... Des chercheurs ont mis en place un nouveau protocole opératoire. Sur un échantillon de $n = 20$ patients, ils mesurent la durée exprimée en mois, X , de récupération de l'acuité visuelle après l'opération, en suivant ce nouveau protocole expérimental.

Question 26 Sur cet échantillon, ils trouvent une moyenne pour X égale à 2,35 mois. Parmi les égalités mathématiques suivantes proposées, une seule traduit exactement ce résultat : laquelle ?

- $\hat{\sigma} = 2,35$ mois
- $\mu = 2,35$ mois
- $s = 2,35$ mois
- $\bar{x} = 2,35$ mois

Question 27 Sur cet échantillon, ils trouvent un écart type pour X égal à 1,45 mois. Parmi les égalités mathématiques suivantes proposées, une seule traduit exactement ce résultat : laquelle ?

- $\hat{\sigma} = 1,45$ mois
- $\hat{\sigma}^2 = 1,45$ mois²
- $s = 1,45$ mois
- $s^2 = 1,45$ mois²

Question 28 Quelle formule permet de calculer l'intervalle de confiance, IC, de la durée moyenne de récupération ?

- IC = $\hat{\mu} \pm \epsilon_{\alpha} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
- IC = $\hat{\mu} \pm \epsilon_{\alpha} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n-1}}$
- IC = $\hat{\mu} \pm t_{\alpha}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$
- IC = $\hat{\mu} \pm t_{\alpha}^{n-1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Question 29 Quelles sont les conditions d'application de ce calcul ? (vous les supposerez satisfaites par la suite)

- Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), normalité, homoscedasticité
- Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), effectif total ≥ 50 , effectifs théoriques ≥ 5
- Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance), normalité

- Échantillon aléatoire simple (représentativité, indépendance)

Question 30 En fixant un risque de première espèce, α , de 5 %, l'intervalle de confiance de la durée moyenne de récupération, μ , vaut [1.65 ; 3.05]. À la suite de cette opération, John DOE a présenté une durée de récupération égale à 4 mois. Il souhaite savoir si sa durée de récupération est « anormale ».

- Sa durée est « anormale » car il est en dehors de l'intervalle de confiance
 Cette question n'a rien à voir avec le calcul de l'intervalle de confiance et le calcul n'est pas faisable compte-tenu de vos connaissances
 Sa durée est « normale » car il est en dehors de l'intervalle de confiance
 Cette question n'a rien à voir avec le calcul de l'intervalle de confiance mais le calcul est faisable compte-tenu de vos connaissances

Afin de savoir si les performances moyennes diffèrent entre les deux protocoles (le traitement classique et le nouveau), les chercheurs mesurent la durée de récupération dans un autre groupe de 20 patients ayant subi l'opération suivant le protocole classique. Ils observent une durée moyenne de récupération de 3,07 mois et un écart type 1,38 mois.

Question 31 Afin de savoir si le nouveau protocole conduit à une durée moyenne de récupération différente de celle de l'ancien, quel test allez-vous réaliser ?

- Un test d'effort (hétéroscédasticité)
 Un test d'égalité de deux moyennes observées (homogénéité)
 Un test d'égalité d'une moyenne observée à une moyenne théorique (conformité)
 Un test du χ^2 d'ajustement

Question 32 Quelle est la valeur de $\hat{\sigma}^2$, l'estimateur de la variance commune ?

- 1,490
 2,005
 2,213
 2,109

Question 33 Que vaut la statistique associée à ce test (en supposant les conditions d'application du test vérifiées) ?

- 0,78 1,34
 1,57 0,95

Question 34 Quelle est la valeur seuil associée à ce test ? (on utilisera un risque de première espèce, α , de 5 %)

- 3,841 2,093
 1,960 2,086

Question 35 Quelle conclusion statistique allez-vous tirer de ces résultats ? (remarque : même si vous n'avez pas su répondre aux deux questions précédentes, en examinant bien les différents choix proposés vous devriez pouvoir répondre à cette question).

- H_0 est acceptée avec un risque de première espèce de 5 %
 H_0 est rejetée avec un risque de deuxième espèce inconnu
 H_0 est rejetée avec un risque de première espèce de 5 %
 En adoptant le seuil $\alpha = 5$ %, H_0 ne peut pas être rejetée

Question 36 Quelles sont les conditions d'application de ce test ? (vous les supposerez satisfaites).

- Échantillons aléatoires simples (représentativité, indépendance), normalité
 Échantillons aléatoires simples (représentativité, indépendance), normalité, homoscedasticité
 Échantillons aléatoires simples (représentativité, indépendance)
 Échantillons aléatoires simples (représentativité, indépendance), effectif total ≥ 50 , effectifs théoriques ≥ 5

Question 37 Quelle conclusion biologique tirez-vous de cette expérience ?

CORRECTION

- La durée moyenne de récupération est presque la même entre les deux protocoles
- La moyenne des durées est égale à la durée des moyennes, en général, pour ce protocole particulier
- Les données ne permettent pas de mettre en évidence une différence de durée moyenne de récupération entre les deux protocoles
- La durée moyenne de récupération est différente entre les deux protocoles

- Fin du sujet -