Chapitre 3

Équations Différentielles

Définition

On appelle **équation différentielle** d'ordre n, une équation qui établit une *relation* entre la variable x, une fonction inconnue $y(x)$ et ses n premières dérivées $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

$F(x, y, y')=0$ est une équation différentielle du premier ordre

$F(x, y, y', y'')=0$ est une équation différentielle du second ordre

…

Application en biologie

S'applique à des champs variés de la biologie:

- Biochimie (cinétique chimique)
- Transmission de signaux électriques dans le corps
- Epidémiologie
- Démographie (écologie)
- …

Dans tous les cas, décrit la dynamique d'un système biologique dans le temps

On parle de modèle dynamique déterministe (car néglige les fluctuations aléatoires)

Poser un modèle sous forme d'équations différentielles

Le plus souvent en faisant un bilan des entrées/sorties par intervalle de temps infiniment petit

Exemple: modèle de dynamique des populations

N(t) = nombre d'individus dans une population à l'instant t

b = taux de natalité (nb de naissance par individu / unité de temps)

m = taux de mortalité (% de décès / unité de temps)

h = tout petit intervalle de temps

$$N(t+h) = N(t) + \text{naissances entre } t \text{ et } t+h - \text{décès entre } t \text{ et } t+h$$

Poser un modèle sous forme d'équations différentielles

N(t+h) = N(t) + naissances entre t et t+h – décès entre t et t+h

Naissances = taux de natalité * durée de l'intervalle de temps = bNh
Décès = taux de mortalité * durée de l'intervalle de temps = bNh

$\Rightarrow$ N(t+h) = N(t) + bN(t)h – mN(t)h

En manipulant un peu cette équation:

$$N(t+h) = N(t) + bN(t)h - mN(t)h$$
$$\Leftrightarrow N(t+h) - N(t) = (b-m)N(t)h$$
$$\Leftrightarrow \frac{N(t+h) - N(t)}{h} = (b-m)N(t)$$

Poser un modèle sous forme d'équations différentielles

$$\Leftrightarrow \frac{N(t+h)-N(t)}{h} = (b-m)N(t)$$

Comme h est infiniment petit:

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} \longrightarrow N'(t)$$

Donc l'équation devient:

$$N'(t) = (b-m)N(t)$$

On parle de modèle de croissance exponentielle à cause de la forme de la solution de cette équation (cf plus loin)

Classifications des équations différentielles

1) Ordre (1er pour cette année)

2) Linéarité?

3) Si linéaire:

    a) Second membre?

    b) Coefficients constants?

Méthodes de résolution:
Equations différentielles non-linéaires

E. D. 1 à variables séparables

$$y' = f(x)\,g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx \Leftrightarrow H(y) = F(x) + C$$

<u>Exemple</u>:

$y' = y^2 e^x$

E. D. 1 homogène

Elles sont de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

on pose $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u = f(u)$

$\Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = f(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{f(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{f(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$

Méthodes de résolution:
Equations différentielles linéaires

E. D. 1 linéaires

Elles sont de la forme : $A(x)y'+B(x)y = C(x)$

E. D. 1 linéaires

Elles sont de la forme : $A(x)y' + B(x)y = C(x)$

Coefficients (constants si indépendants de x)

Linéaire: car y' et y tous seuls

Second membre

E. D. 1 linéaires

Sans second membre: A(x)y'+B(x)y = 0

Résolution simple car à variable séparable

$$A(x)y' = -B(x)y \quad \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{B(x)}{A(x)} \quad \Leftrightarrow \ln|y| = -\int \frac{B(x)}{A(x)} dx + C$$

$$\Leftrightarrow y = \pm e^{C} \exp\{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx\} \qquad \boxed{\Leftrightarrow y = A\exp\{-\int \frac{B(x)}{A(x)} dx\}}$$

Cas particulier: A et B constants $\boxed{y = A\exp\{-\frac{B}{A}x\}}$

E. D. 1 linéaires

Cas général: $A(x)y'+B(x)y = C(x)$

<u>Coefficients constants</u> : $ay'+by = C(x)$

=> Méthode de la variation de la constante
ou Méthode de la solution particulière

<u>Coefficients non constants :</u>

=> Méthode de la variation de la constante

E. D. 1 linéaires

Méthode de la solution particulière:

On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre (ESSM):

$$Ay' + By = 0$$

$$y_{GESSM} = A\exp\{-\frac{B}{A}x\}$$

E. D. 1 linéaires

Méthode de la solution particulière:

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation avec second membre (y_{GEASM}) de la même forme que le second membre

Second membre de la forme :	Solution particulière
exp(ax)	**Aexp(ax)**
P(x) **polynome de degré n**	**Q(x)** **polynome de degré n**
P(x)exp(ax) **P: polynome de degré n**	**Q(x)exp(ax)** **Q: polynome de degré n**
Acos(wx) + B sin(wx)	**Ccos(wx) + D sin(wx)**

Remarque:

solutions avec polynôme peut ne pas marcher

$\Rightarrow$ On cherche avec un polynôme de degré +1

E. D. 1 linéaires

Méthode de la solution particulière:

La solution générale de l'équation avec second membre est alors:

$$y = y_{GESSM} + y_{PEASM}$$

Exemple:

$$y' + y = xe^{x}$$

E. D. 1 linéaires

Méthode de la variation de la constante:

On commence par résoudre l'équation différentielle sans second membre (ESSM):

$$A(x)y' + B(x)y = 0$$

$$y = A\exp\{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx\}$$

E. D. 1 linéaires

Méthode de la variation de la constante:

La solution générale de l'équation avec second membre peut se mettre sous la forme:

$$y = A(x)\exp\{-\int \frac{B(x)}{A(x)}dx\}$$

On recherche A(x) en injectant la formule dans l'équation différentielle

<u>Exemple</u>: $x^3 y' + 3x^2 y = e^x$

E. D. 1 linéaires

Calcul de la constant d'intégration

La résolution d'une équation différentielle du premier ordre fait intervenir une constante d'intégration qui peut être déterminée à l'aide d'une valeur particulière

Exemple: équation précédente avec $y(1) = 1$

Exemples en démographie

Spécificités des « vrais » modèles

L'écriture de la forme y'=f(x,y) est classique en mathématique mais en biologie, quelques nuances:

- La variable ne s'appelle pas toujours y, on peut lui préférer un symbole ayant plus de sens biologique (N, I, T,…)

- La variable x est souvent remplacée par t (car modèles dynamiques donc s'intéressant à l'évolution de quantités dans le temps)

- Le lien entre y (ou équivalent) et x (ou équivalent) n'est généralement pas donné par une formule avec des nombres, mais avec des lettres (paramètres)

$$\frac{dy}{dx} = 2y \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = (b-m)N$$

MATHS — BIO

Spécificités des « vrais » modèles

Ne vous laissez pas intimider par cette formulation car:

- Les variables N, I, T,… se gèrent suivant les mêmes règles que y. Et t comme x
- Les paramètres (b et m) sont des nombres constants (mais indéterminés) qui se gèrent comme les constantes (1, -2, 4.2,…)

<u>Exemple</u>: modèle démographique N'(t)=(b-m)N(t)

$$\frac{dN}{N} = (b-m)dt \Leftrightarrow \ln|N| = (b-m)t + C \Leftrightarrow N = Ae^{(b-m)t}$$

- Si vraiment le changement de noms vous gène trop au début, revenir à la notation classique, par exemple:

$$\left.\begin{array}{r} N \to y \\ t \to x \\ b \to 3 \\ m \to 2 \end{array}\right] \quad \frac{dy}{dt} = (3-2)y \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow y = Ae^{(3-2)x} \xrightarrow[\substack{b \to 3 \\ m \to 2}]{\substack{N \to y \\ t \to x}} \boxed{N = Ae^{(b-m)t}}$$

(Résolution sans simplifier les calculs avec des nombres, type 3 - 2 = 1)

Modèle de croissance logistique

Modèle $N' = (b-m)N \Rightarrow N = N_0 \exp\{(b-m)t\}$ (avec $N_0 = N(0)$)

N tend vers $+\infty$ en $+\infty$ => croissance illimitée de la population => irréaliste biologiquement

=> Hypothèse erronée, ici que b et m sont constants

En réalité, les taux de natalité et/ou de mortalité sont affectés par la densité <= compétition

<u>Modèle logistique</u>: $r = b-m$ dépend linéairement de N, cad $r(N) = r_0 + \delta N$

On réinjecte cette relation entre r et N dans le modèle de <u>base</u> (pas dans la solution de l'équation)

$$\frac{dN}{dt} = (r_0 + \delta N)N$$

<u>Résolution</u>: variables séparable, décomposition en éléments simples,… (cf TT)