Mathématiques pour les Sciences de la Vie

Analyse – Équations différentielles / Modélisation

Pr. Sandrine CHARLES

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

20 septembre 2016

Table des matières

Plan détaillé

1. Généralités
   - la Modélisation en Biologie
   - Modèles dynamiques à base d'EDO
   - Les équations différentielles ordinaires ou EDO

Les Bio-mathématiques

- Maths : étudier et développer des méthodes pour la prédiction.
- Biologie : trouver des descriptions et des explications des phénomènes naturels.
- Modélisation : utiliser les mathématiques comme outil pour expliquer et prédire les phénomènes naturels.

Utilité des modèles en biologie

Les modèles sont utiles :

- Tester des hypothèses sans risque (traitement médicamenteux. . .)
- Prédire des performances dans des conditions testables ou non

Les modèles sont limités :

- Modèle mathématique simple $\leftrightarrow$ Modèle non réaliste
- Modèle réaliste $\leftrightarrow$ Paramètres trop nombreux
- Modèle simpliste $\rightsquigarrow$ conclusion irréaliste

Choisir un bon modèle ?

Le principe de parcimonie, ou "Rasoir d'Ockham"

Image: Peter King (Univ. Toronto, Canada)

"Pluralitas non est ponenda sine necessitate"

"Les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité"

Guillaume d'Ockham (1285-1347)

Plan détaillé

Modèles dynamiques

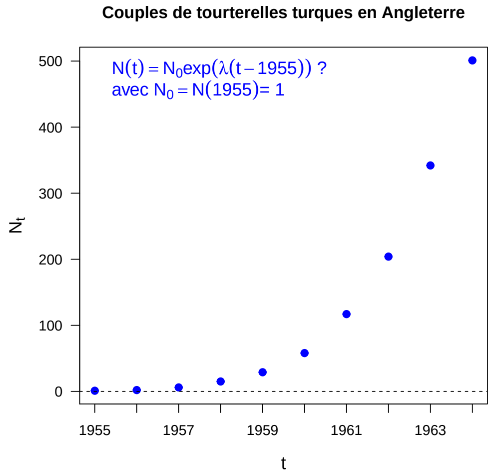
Un exemple : la dynamique de la population de tourterelles turques en Angleterre

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501

Modèles dynamiques

Un exemple : la dynamique de la population de tourterelles turques en Angleterre

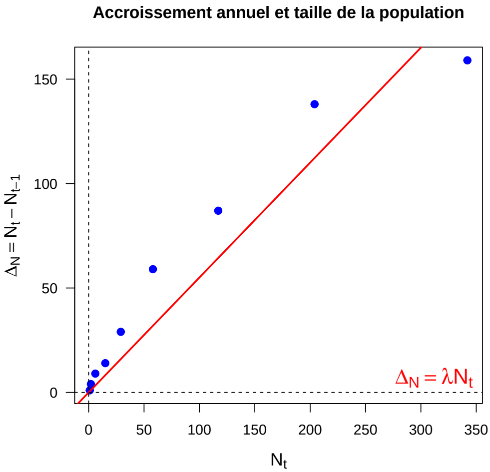
Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



Modèles dynamiques

Un exemple : la dynamique de la population de tourterelles turques en Angleterre

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



Un modèle simple

La variation du nombre de lieux d'observation est proportionnelle au nombre de lieux d'observation et au temps écoulé

$$\Delta N = \lambda N_t \Delta t$$

Hypothèses du modèle :

- Les lieux d'observation sont indépendents ;
- Chaque lieu engendre en moyenne λ nouveaux lieux d'observation durant l'intervalle de temps Δt.

$$\Delta N = \lambda N \Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$$

$\frac{\Delta N}{\Delta t}$ est le *taux d'accroissement* de $N(t)$ relativement à t. Ainsi, lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient :

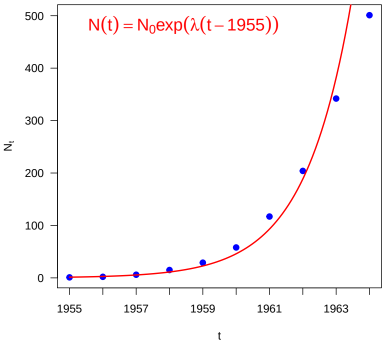
$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \Leftrightarrow N'(t) = \lambda N(t)$$

C'est une *équation différentielle*, dont la **solution** est :

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

On vérifie en effet que $N'(t) = \lambda N_0 e^{\lambda t} = \lambda N(t)$.

Couples de tourterelles turques en Angleterre



Plan détaillé

1. Généralités
   - la Modélisation en Biologie
   - Modèles dynamiques à base d'EDO
   - Les équations différentielles ordinaires ou EDO

- La notion d'équation différentielle apparaît à la fin du XVII$^{\text{ème}}$ siècle ;
- Le calcul différentiel et intégral est introduit par Newton et Leibnitz en 1686 ;
- Les premières applications sont en mécanique et géométrie ;
- Au XX$^{\text{ème}}$ siècle apparaissent les applications en biologie.

Définition

On appelle équation différentielle une relation entre les valeurs de la variable x et les valeurs y, y', y'',... $y^{(n)}$ d'une fonction inconnue $y(x)$ et de ses dérivées au point x.
L'inconnue que l'on cherche est la fonction $y(x)$.

Ordre de l'équation différentielle :

$$E_n : \quad F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

$$E_1 : \quad F(x, y, y') = 0$$

On note y' la dérivée de la fonction $y(x)$ par rapport à x, soit $\frac{dy}{dx}$.

Exemples E_1 : $y' = x$, $y' = y$, $y' + \frac{x^2}{2}y = e^x$.

Vocabulaire

Exemple de la dynamique de population des tourterelles avec l'équation différentielle d'ordre 1 : $N'(t) = \lambda N(t)$.

- Résoudre (intégrer) : trouver **toutes** les solutions de l'équation différentielle.
  $N'(t) = \lambda N(t) \Rightarrow N(t) = Ke^{\lambda t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
- Condition initiale : $N(1955) = 1$, ou par exemple $N(0) = N_0$.
- Solution particulière : **la** solution qui satisfait la condition initiale : $N(t) = e^{\lambda(t-1955)}$ ou $N(t) = N_0 e^{\lambda(t)}$.
- Courbe intégrale : la représentation graphique d'une solution.

Une infinité de solutions

- $y'(x) \to y(x)$: notion de primitive (une fonction continue admet une infinité de primitives) ;
- Ici, $N'(t) = \lambda N(t) \;\Rightarrow\; N(t) = K\,e^{\lambda t}$ avec $K \in \mathbb{R}$;
- Généralement, on s'intéresse à une seule d'entre elles, celle qui vérifie la condition initiale.

Table des matières

Plan détaillé

2. Méthodes d'intégration
   - Équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables
   - EDO1 linéaires

ED1 à variables séparables

Elles sont du type :

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Méthode d'intégration :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) &\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx\end{aligned}$$

Solution : $G(y) = F(x) + C$ où G est une primitive de $\frac{1}{g}$, F une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 1 : modèle exponentiel

Modèle exponentiel ou modèle de Malthus (1792)

Exemple : Dynamique de population des tourterelles turques
$N'(t) = \lambda N(t) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$, qu'on écrit encore $\frac{dN}{dt} = \lambda N$.

Écriture générique : $y' = \lambda y \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \lambda y$.

$\frac{dy}{dt} = \lambda y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \lambda dt$
$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \lambda dt$
$\Leftrightarrow \ln |y(t)| = \lambda t + \text{cste}$
$\Leftrightarrow y(t) = e^{\lambda t + \text{cste}}$ (transformation exponentielle)
$\Leftrightarrow y(t) = e^{\lambda t} e^{\text{cste}}$
$\Leftrightarrow y(t) = Ke^{\lambda t}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : modèle logistique

Modèle logistique ou modèle de Verhulst (1844)
$\rightarrow$ Croissance pondérale d'un organisme :

$$\frac{dP(t)}{dt} = \lambda P(t) - \mu P(t)^2 = \mu P(t)\left(\frac{\lambda}{\mu} - P(t)\right)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} = \mu P(t)\left(\frac{\lambda}{\mu} - P(t)\right) \Leftrightarrow \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu} - P\right)} = \mu dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu} - P\right)} = \mu \int dt$$

On intègre le terme de gauche par une décomposition en éléments simples (variable P).

Exemple : modèle logistique

$$\frac{1}{P\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)} = \frac{a}{P} + \frac{b}{\frac{\lambda}{\mu}-P} \Leftrightarrow a\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right) + bP = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a\frac{\lambda}{\mu} = 1 \\ b - a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{\mu}{\lambda} \\ b = \frac{\mu}{\lambda} \end{cases}$$

Soit

$$\int \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)} = \mu \int dt \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}\left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}\right) = \mu \int dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}\right) = \lambda \int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln P - \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right) = \lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = \lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = Ke^{\lambda t}$$

Ce que l'on cherche c'est $P(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{P(t)}{\frac{\lambda}{\mu} - P(t)} = Ke^{\lambda t} &\Leftrightarrow P(t) = \left(\frac{\lambda}{\mu} - P(t)\right) Ke^{\lambda t} \\
&\Leftrightarrow P(t)\left(1 + Ke^{\lambda t}\right) = \frac{\lambda K e^{\lambda t}}{\mu} \\
&\Leftrightarrow P(t) = \frac{\lambda K e^{\lambda t}}{\mu\left(1 + Ke^{\lambda t}\right)} \\
&\Leftrightarrow P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu} K}{e^{-\lambda t} + K}
\end{aligned}$$

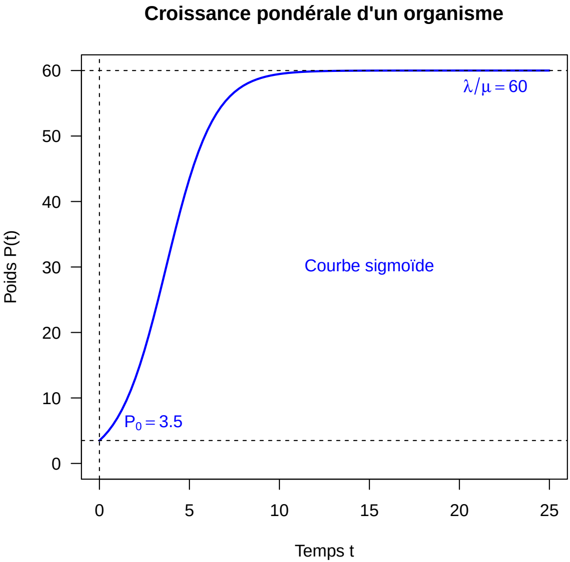
avec $K \in \mathbb{R}$

Au temps $t = 0$, on pose $P(0) = P_0$, soit :

$$\begin{aligned} P_0 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{1+K} &\Leftrightarrow P_0(1+K) = \frac{\lambda}{\mu}K \\ &\Leftrightarrow K\left(P_0 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + P_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow K = \frac{P_0}{\frac{\lambda}{\mu} - P_0} \end{aligned}$$

en remplaçant K par sa valeur dans l'expression de $P(t)$, on obtient :

$$P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{e^{-\lambda t} + K} \Rightarrow P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}P_0}{P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu} - P_0\right)e^{-\lambda t}}$$


Croissance pondérale d'un organisme
Poids P(t)
Temps t
0
10
20
30
40
50
60
0
5
10
15
20
25
$\lambda/\mu = 60$
Courbe sigmoïde
$P_0 = 3.5$

Plan détaillé

2. Méthodes d'intégration
   - Équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables
   - EDO1 linéaires

EDO1 linéaires

Une équation différentielle d'ordre 1 linéaire est du type :

$$\underbrace{y'}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{f(x)y}_{\text{linéaire en } y} = \underbrace{g(x)}_{\text{second membre}}$$

où

- $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions quelconques de x ;
- Si $\forall x,\ g(x) = 0$, alors l'équation est dite "Sans Second Membre" (SSM).

EDO1 linéaires sans second membre

EDO 1 SSM

$$
\begin{aligned}
y' + f(x)y = 0 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -f(x)y \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -f(x)dx \\
&\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = -F(x) + C \\
&\Rightarrow y(x) = Ke^{-F(x)}
\end{aligned}
$$

où

- K est une constante réelle quelconque ;
- F est une primitive de f.

Exemple

On chercher à résoudre l'équation suivante :

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

On recherche d'abord les solutions de l'équation sans second membre

$$y' - \frac{y}{x} = 0$$

On a une équation de la forme $y' + f(x)y = 0$ avec $f(x) = -\frac{1}{x}$.
La primitive de $f(x)$ est $F(x) = -\ln|x|$.
Les solutions sont donc du type :

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ke^{\ln|x|} = Kx \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

EDO1 linéaire avec second membre $y' + f(x)y = g(x)$

- On cherche d'abord les solutions y_{ssm} de l'équation sans second membre $y' + f(x)y = 0$.
  Elles sont du type $y_{\text{ssm}}(x) = Ke^{-F(x)}$, avec $K \in \mathbb{R}$.
- On recherche ensuite les solutions générales de l'équation avec second membre :
  - Recherche d'une solution particulière y_{part}, les solutions générales sont alors du type :

    $$y(x) = y_{\text{ssm}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

  - *ou* méthode de la variation de la constante, on cherche les solutions du type

    $$y(x) = K(x)e^{-F(x)}$$

    où $K(x)$ est une fonction de x.

Principe de la méthode de la solution particulière

- On cherche à résoudre $y' + f(x)y = g(x)$.
- Soient y_1 et y_2 deux solutions données

$$
\begin{aligned}
&(y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = g(x) - f(x)y_1 - (g(x) - f(x)y_2) \\
\Leftrightarrow &(y_1 - y_2)' = -f(x)y_1 + f(x)y_2 \\
\Leftrightarrow &(y_1 - y_2)' = -f(x)(y_1 - y_2) \\
\Leftrightarrow &(y_1 - y_2)' + f(x)(y_1 - y_2) = 0
\end{aligned}
$$

$(y_1 - y_2) = y_{\text{ssm}}$ est solution de l'équation sans second membre.
Connaissant une solution particulière y_p, la forme générale des solutions est

$$y = y_p + y_{\text{ssm}}$$

où y_{ssm} est solution de l'équation sans second membre.

Exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Recherche d'une solution particulière.

On cherche une solution du type $y(x) = \alpha x^3$, soit $y'(x) = 3\alpha x^2$.
On a alors

$$\begin{aligned} y' - \frac{y}{x} = x^2 &\Leftrightarrow 3\alpha x^2 - \frac{\alpha x^3}{x} = x^2 \\ &\Leftrightarrow 2\alpha x^2 = x^2 \\ &\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc $y_{\text{part}}(x) = \frac{x^3}{2}$
Les solutions générales sont donc de la forme

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + y_{\text{ssm}}(x) = \frac{x^3}{2} + Kx$$

Principe de la méthode variation de la constante (Laplace)

- On cherche à résoudre $y' + f(x)y = g(x)$.
- $y_{\text{ssm}} = Ke^{-F(x)}$ est solution de l'équation SSM.
- Les solutions de l'équation ASM seront du type

$$y = K(x)e^{-F(x)}$$

$$\begin{aligned} y = K(x)e^{-F(x)} &\Rightarrow y' = K'(x)e^{-F(x)} + K(x)(-F'(x))e^{-F(x)} \\ &\Leftrightarrow y' = K'(x)e^{-F(x)} - K(x)f(x)e^{-F(x)} \\ &\Leftrightarrow y' = K'(x)e^{-F(x)} - f(x)y \\ &\Leftrightarrow y' + f(x)y = K'(x)e^{-F(x)} \end{aligned}$$

$$y \text{ sol. ASM} \Leftrightarrow K'(x)e^{-F(x)} = g(x) \Leftrightarrow K(x) = \int g(x)e^{F(x)}\,dx$$

Exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Méthode de variation de la constante

Les solutions sont du type $y(x) = K(x)x$, soit $y'(x) = K(x) + xK'(x)$ et vérifient $y' - \frac{y}{x} = x^2$, soit

$$\begin{aligned}
y' - \frac{y}{x} = x^2 &\Leftrightarrow K(x) + xK'(x) - \frac{xK(x)}{x} = x^2 \\
&\Leftrightarrow xK'(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow K'(x) = x \\
&\Rightarrow K(x) = \int x dx \\
&\Rightarrow K(x) = \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)x = \frac{x^3}{2} + Cx$$

Remarques

- Recherche de solution particulière
  - Parfois difficile
  - Requiert de l'entraînement
  - Rapide
- Méthode de variation de la constante
  - Relativement simple
  - Le calcul de $\int g(x)e^{F(x)}\,dx$ peut être très long...

Une fois la solution générale trouvée, dérivez-la pour vérifier qu'elle est solution de l'équation de départ !

Table des matières

1. Parmi les équations suivantes, identifiez celle qui **n'est pas** une équation différentielle ordinaire :

A $y' = \alpha y$

B $y = \alpha x$

C $y'' = y' + y$

D $y' - \alpha y = x$

2. Donner les solutions de l'équation différentielle $y' = x$.

- **A** $y(x) = Ke^x \,, \quad K \in \mathbb{R}$
- **B** $y(x) = K \ln|x| \,, \quad K \in \mathbb{R}$
- **C** $y(x) = \frac{x^2}{2} + K \,, \quad K \in \mathbb{R}$
- **D** $y(x) = x^2 + K \,, \quad K \in \mathbb{R}$

Soit $f(x) = \frac{3x^2 - x - 3}{x - 2}$.

3. Quel est le domaine de définition de f ?

A $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

B $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{3}\}$

C $\mathbb{R}^{*+}$

D $\mathbb{R}^{+}$

Soit $f(x) = \frac{3x^2-x-3}{x-2}$.

4. Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

A f n'admet pas de limite en $+\infty$

B 0

C $+\infty$

D 3

Soit $f(x) = \frac{3x^2-x-3}{x-2}$.

5. On peut écrire $f(x) = ax + b + \frac{7}{x-2}$. Calculez a et b :

A $a = 3$ et $b = 1$

B $a = 1$ et $b = 3$

C $a = 1$ et $b = 5$

D $a = 3$ et $b = 5$

Soit $f(x) = 3x + 5 + \frac{7}{x-2}$.

6. La courbe représentative de f possède en $+\infty$:

A une asymptote horizontale d'équation $y = 5$

B aucune asymptote

C une asymptote oblique d'équation $y = 3x + 5$

D une asymptote verticale d'équation $x = 3$

Soit $f(x) = 3x + 5 + \frac{7}{x-2}$.

7. Laquelle de ces fonctions est une primitive de f ?

A $x^2 + 5x - 7\ln|x| + K,\ K \in \mathbb{R}$

B $\frac{3}{2}x^2 + 5x + 7\ln|x-2| + K,\ K \in \mathbb{R}$

C $x^2 + 5x + 7\ln|x-2| + K,\ K \in \mathbb{R}$

D $\frac{3}{2}x^2 - 5x - 7\ln|x+2| + K,\ K \in \mathbb{R}$

Soit $g(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

8. La fonction dérivée de g vaut :

A $g'(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$

B $g'(x) = -2xe^{\frac{-x^2}{2}}$

C $g'(x) = -xe^{\frac{-x^2}{2}}$

D $g'(x) = 2xe^{\frac{-x^2}{2}}$

Soit $g(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

9. La fonction g admet un extremum en :

A $x = 0$

B $x = -1$

C $x = 1$

D La fonction g n'admet aucun extremum

Soit $g(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$.

10. La courbe représentative de g admet un ou des points d'inflexion en :

A $x = -1$ et $x = 0$

B $x = 0$ et $x = 1$

C $x = -1$ et $x = 1$

D $x = 0$ uniquement