Mathématiques pour les Sciences de la Vie

Analyse – Primitives / Intégration

Pr. Sandrine CHARLES

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

2 septembre 2016

Table des matières

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Notion de Primitive

Soit F une fonction dérivable telle que $F' = f$.

$$F \quad \underset{\text{Intégrer}}{\overset{\text{Dériver}}{\rightleftarrows}} \quad f$$

- F est une primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$
- Si F est une primitive de f, alors $F + K$ l'est aussi.
- L'ensemble des primitives de f est noté

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

Plan détaillé

1. Généralités
   - Notion de primitive
   - Exemples de primitives connues
   - Interprétation géométrique

Exemples de primitives

Voir formulaire `http://mathsv.univ-lyon1.fr`

Dérivée	Primitive
x^α, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\ln x$	$x \ln x - x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

Exemples de primitives

Voir formulaire `http://mathsv.univ-lyon1.fr`

Dérivée	Primitive
$\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\|u\|$

Exemple : la fonction $\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$ a pour primitive $2\sqrt{x^2-1}$.

Plan détaillé

Interprétation géométrique

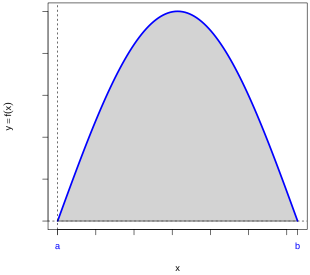
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

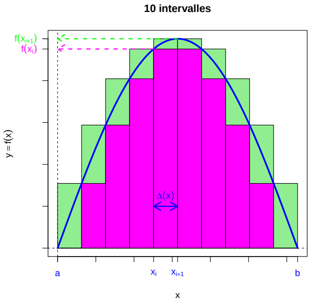
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

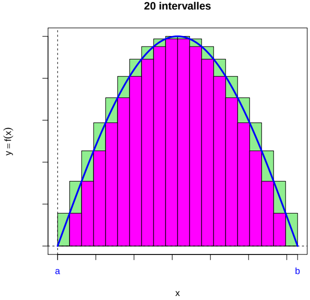
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

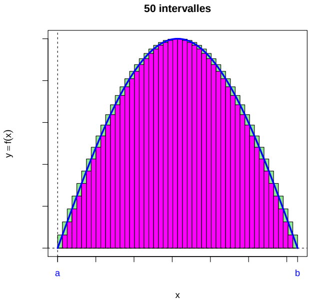
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_{i+1})$$

- Lorsque $n \to \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. La valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple : $C(x) = 2e^{-\lambda x}$ sur $[0; 4]$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4-0}\int_0^4 2e^{-\lambda xt}\,dx &= \frac{2}{4}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^4 \\ &= -\frac{1}{2\lambda}\left(e^{-4\lambda}-1\right) \\ &= \frac{1}{2\lambda}\left(1-e^{-4\lambda}\right)\end{aligned}$$

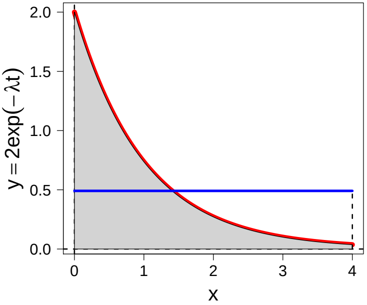


Table des matières

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I

$$\forall (a,b,c) \in I^3,\ \int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt$$

Conséquences :

- $\displaystyle\int_a^a f(t)\,dt = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$)

- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

Plan détaillé

2. Propriétés
   - Relation de Chasles
   - Inégalités et intégration
   - Parité et intégration

Intégrales de fonctions paires/impaires

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Table des matières

Plan détaillé

3 Méthodes de calcul

- Décomposition en somme
- Changement de variable
- Décomposition en éléments simples
- Intégration par parties

Décomposition en somme

Principe

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) \, dx = \alpha \int f(x) \, dx + \beta \int g(x) \, dx$$

Exemple

$f(x) = 2x - 3x^2$

Plan détaillé

3. Méthodes de calcul
   - Décomposition en somme
   - Changement de variable
   - Décomposition en éléments simples
   - Intégration par parties

Changement de variable

Principe

On pose $x = \phi(t)$ d'où $dx = \phi'(t)dt$

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ \phi)(t)\phi'(t)\,dt$$

Puisque $x = \phi(t)$, $f(x) = f(\phi(t)) = (f \circ \phi)(t)$

et puisque $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt$.

Bien penser à changer aussi les bornes de l'intégrale.

Changement de variable

Exemple

Calculez $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

Changement de variable

Exemple : $\displaystyle\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx$

On pose $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = t^2 + 1$

- $x = a \Leftrightarrow t = \sqrt{a-1}$
- $x = b \Leftrightarrow t = \sqrt{b-1}$
- $x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t\,dt$

$$\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{t}{t^2+1} 2t\,dt = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \left(2 - \frac{2}{t^2+1}\right)\,dt = 2\left[t - \arctan t\right]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}}$$

$$= 2\left[\sqrt{x-1} - \arctan\sqrt{x-1}\right]_a^b$$

Plan détaillé

3 Méthodes de calcul

- Décomposition en somme
- Changement de variable
- Décomposition en éléments simples
- Intégration par parties

Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction qui est le rapport de deux fonctions polynomes.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{A(x)}{B(x)}\,dx$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynomes.
Principe : Réduire f en éléments simples pour obtenir :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

On cherche ensuite les λ_i tels que

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{x - r_i}$$

où les r_i sont les racines du polynôme $B(x)$.

Exemple

On veut calculer $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x-0} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

Par identification, on obtient $a+b=0$ et $-a=1$,
soit $a=-1$ et $b=1$.

$$\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)\,dx$$

Plan détaillé

3 Méthodes de calcul
- Décomposition en somme
- Changement de variable
- Décomposition en éléments simples
- Intégration par parties

Intégration par parties
Principe

Dérivée d'un produit de fonctions uv.

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

En intégrant de part et d'autre de l'égalité :

$$\int (u'v)(x)\,dx = \int \big((uv)'(x) - (uv')(x)\big)\;dx$$

Soit

$$\int (u'v)(x)\,dx = \int (uv)'(x)\,dx - \int (uv')(x)\,dx$$

Soit encore

$$\int (u'v)(x)\,dx = uv(x) - \int (uv')(x)\,dx$$

Intégration par parties

Exemple

Que vaut $\int \ln x \, dx$?

On pose :

- $u'(x) = 1 \Leftarrow u(x) = x$
- $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

La formule de l'intégration par partie donne :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K$$

Intégration par parties

Quand l'utiliser ?

- Produits de fonctions
- Simplifier des produits de fonctions à intégrer (éventuellement, plusieurs IPP)
  - $\int P(x)e^x \, dx$ où P est un polynôme.
  - $\int P(x) \sin x \, dx$ ou $\int P(x) \cos x \, dx$ où $P(x)$ est un polynôme.
- Faire apparaître une propriété simple : $\int e^x \sin x \, dx$ (2IPP nécessaires)

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx$

Première intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx = \int (u_1' v_1)(x) \, dx$

- $u_1'(x) = e^x \Leftarrow u_1(x) = e^x$
- $v_1(x) = \sin x \Rightarrow v_1'(x) = \cos x$

IPP1 : $\int (u_1' v_1)(x) \, dx = [(u_1 v_1)(x)] - \int (u_1 v_1')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$$

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$

Deuxième intégration par parties : $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx = \int (u_2' v_2)(x) \, dx$

- $u_2'(x) = e^x \Leftarrow u_2(x) = e^x$
- $v_2(x) = \cos x \Rightarrow v_2'(x) = -\sin x$

IPP2 : $\int (u_2' v_2)(x) \, dx = [(u_2 v_2)(x)] - \int (u_2 v_2')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \left([e^x \cos x] - \int -e^x \sin x \, dx \right)$$

Soit :

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + K$$