Chapitre 2

Variables aléatoires

Variables aléatoires : définition

Résultat d'une expérience dont l'issue est multiple (VARIABLE) et imprévisible (ALÉATOIRE)

X : tirage pièce de monnaie, X → « pile » / → « face »

VARIABLE

Et, avant jet de pièce, il est impossible de prévoir si « pile » ou « face »

ALÉATOIRE

Exemple: on considère au hasard un(e) étudiant(e) de l'amphi

v.a. X : « taille de l'étudiant(e) »

Tirages successifs de X: 1,80; 1,56; 1,91; 1,69, …

On pourrait faire la même chose avec un caractère non quantitatif

Ex: couleur des cheveux de l'étudiant(e)

Variable aléatoire

Deux types de variables aléatoires:

✓ **Variables aléatoires discrètes**

ne prend que des valeurs discrètes (numériques ou non)

✓ **Variables aléatoires continues**

peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné

Variable aléatoire discrète

S'oppose aux variables aléatoires continues qui caractérisent les mesures qui peuvent avoir tout plein de chiffres après la virgule

⇒ Variables qualitatives

- ⇒ couleur des cheveux
- ⇒ niveau de satisfaction
- ⇒ type de cellule
- ⇒ sexe,...

⇒ Variables quantitatives discrètes

- ⇒ nombre de cas de grippe dans une famille de 5 personnes
- ⇒ nombre de jeunes dans une portée

__Exemple__ : on lance une pièce deux fois

v.a. X: « nb de faces obtenues »

Ω={FF, FP, PF, PP};
Valeurs possibles pour X={0, 1, 2}

➡ **v.a. discrète**

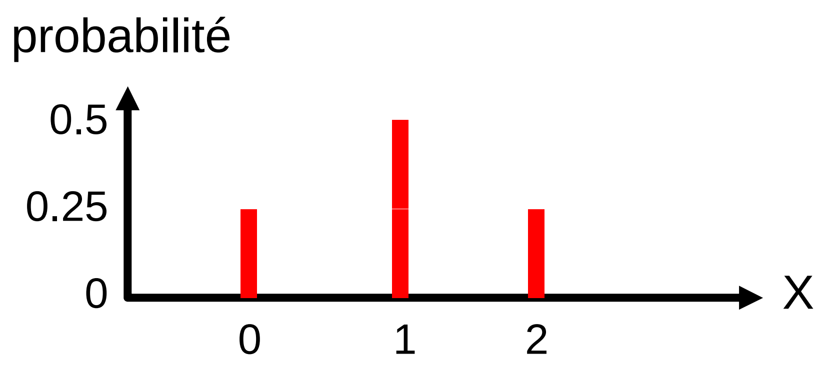
Variable aléatoire discrète: loi de probabilité

Décrit simplement la probabilité de chaque résultat possible pour X.

La somme de toutes les probabilités vaut 1

Souvent résumé sous forme d'un tableau ou d'un diagramme en bâton.
Exemple: nombre de fois face obtenu après deux lancés

Valeurs possibles de X (x_i)	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	1/2	1/4



Variable aléatoire discrète

Fonction de répartition

Définition mathématique:

$F(x) = P(X<x)$

Sur l'exemple des deux lancés de pièces

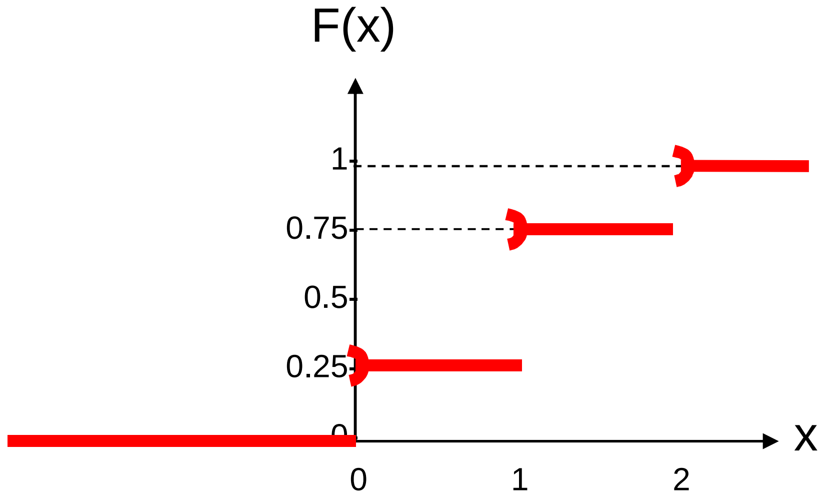
3 valeurs possibles:
0 (p=0.25), 1(p=0.5) et 2(p=0.25)

Que vaut F(1.5)? (par exemple)

$X<1.5 \Leftrightarrow X=0$ ou $X=1$

Donc $P(X<1.5) = P(X=0)+P(X=1)=0.75$

Représentation graphique:



→ distribution des probabilités cumulées associée à la v.a. X

Variable aléatoire discrète

Espérance: définition

C'est la valeur moyenne de X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)x_i = \mu$$

Exemple : espérance de X : « nb de faces après deux lancés »

$$E(X) = (2x0.25 + 1x0.5 + 0x0.25) = 1$$

→ 1 fois face en moyenne

Variable aléatoire discrète

Espérance: propriétés

X et Y, 2 variables aléatoires discrètes définies sur le même univers Ω

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(a + X) = a + E(X)$$

Soit $Z = X - E(X)$, $E(Z) = E[X - E(X)] = E(X) - E[E(X)] = E(X) - E(X) = 0$

→ une v.a. est dite centrée si son espérance est nulle

Variable aléatoire discrète

La variance: une mesure de dispersion

Deux situations: on tire un nombre au hasard
Exp1: entre 0 et 10
Exp2: entre 4 et 6

Il est clair que dans l'exp2 les résultats sont moins dispersés
$\Rightarrow$Mesure de la dispersion?
<u>*Moyennes*</u> : Exp1 = 5, Exp2 = 5 (ne répond pas au problème)

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 | 4 5 6

5 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 ← Distance à la moyenne → 1 0 1

$\Rightarrow$ Les résultats de l'exp1 sont globalement plus éloignés de la moyenne

On peut calculer la moyenne de la distance à la moyenne: Exp1 = 2.73; Exp2 = 0.66

Variable aléatoire discrète

Variance: définition

Mesure la dispersion de la loi autour de sa moyenne

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i)\left[x_i - E(X)\right]^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

AVEC

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} p(X = x_i) x_i^2$$

On prend la moyenne du carré de la distance à la moyenne pour des commodités mathématiques

Exemple: variance du nombre de faces obtenues après deux lancés

$$V(X)= 0.25x[2-1]^2 + 0.5x[1-1]^2 + 0.25x[0-1]^2 = 0.5$$

ou

$$V(X) = [0.25x2^2 + 0.5x1^2 + 0.25x0^2] -1^2 = 0.5$$

Variable aléatoire discrète

Variance: propriétés

X et Y, 2 variables discrètes définies sur le même univers Ω

$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y indépendantes

$V(aX) = a^2 V(X)$

$V(a + X) = V(X)$ car $V(a) = 0$

Soit $Z = X/\sqrt{V(X)}$, on montre que $V(Z)=1$

Une v.a. est dite réduite si sa variance est égale à 1