Exercice : 3-1**
(identifiant : integparties-b-3-1)

3-1** () – énoncé

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \qquad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \qquad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx$$

1. Calcul de I.
   Soit la fonction définie sur $[0,1]$ par :
   $$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$$
   a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
   b) En déduire la dérivée f' de f.
   c) Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et K.
   a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que $J + 2I = K$. À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que $K = \sqrt{3} - J$.
   b) En déduire les valeurs de J et K.

3-1** () – correction

1. Calcul de I.
   a) On calcule la dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2+2}$. Il s'agit d'une fonction composée, et on a $(u \circ v)' = v'u' \circ v$. Ici avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $v(x) = x^2 + 2$, en appliquant la formule on obtient :
   $$\left(\sqrt{x^2+2}\right)' = 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$
   b) On applique le même raisonnement pour calculer f' dérivée de f. On obtient :
   $$\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right)' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}} = \frac{\sqrt{x^2+2}+x}{\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\left(\sqrt{x^2+2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}.$$
   c) On remarque que la valeur trouvée est celle que l'on doit intégrer dans le calcul de I. On a alors :
   $$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx = \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{3}\right) - \ln\sqrt{2} = \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

2. Calcul de J et K.

   a) On vérifie que $J+2I=K$. En effet :

$$J+2I=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx+2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx=K.$$

   On procède à l'intgération par parties pour K. Pour cela on prend $u'=1$,$v=\sqrt{x^2+2}$, ce qui fait $u=x$ et $v'=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. On a alors :

$$K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}dx=\left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1-\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx=\sqrt{3}-0-J=\sqrt{3}-J.$$

   b) On dispose de deux équations à deux inconnues (on connait la valeur de I, voir plus haut) :

$$\begin{cases} J+2I=K \\ K=\sqrt{3}-J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-2I\right) \\ K=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+2I\right) \end{cases}$$

   En remplacant la seconde dans la première, on arrive à :

$$\begin{cases} J=\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \\ K=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$