Exercice : 6-1**
(identifiant : etufonction-b-6-1)

6-1** () – énoncé

Étudiez et tracez les graphes des fonctions suivantes :

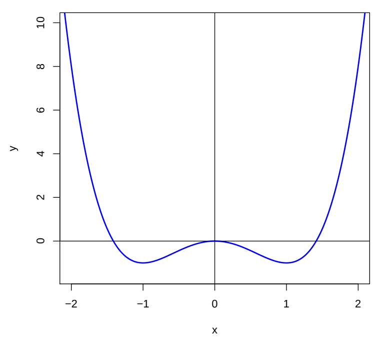
1. $y = x^4 - 2x^2$
2. $y = \ln(1 - 2\cos x)$
3. $y = xe^{-x}$
4. $y = \dfrac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$
5. $y = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$
6. $y = 8x^3 - 12x^2$
7. $y = \dfrac{3x - x^2 - 2}{x^2}$
8. $y = \sin^2 x$
9. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

6-1** () – correction

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

   — Domaine de définition : f est un polynôme de degré 4. Le domaine de définition de f est $D_f = \mathbb{R}$.
   — Parité : $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$, donc f est paire.
   — Dérivée : $\forall x \in D_f,\ f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$
   — Limites : f est un polynôme, les limites en $\pm\infty$ sont déterminées par le signe du coefficient du terme de plus haut degré.
   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$$
   — Tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ et représentation graphique sur $\mathbb{R}$:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = 4x^3 - 4x$		$-$	0	$+$	
$f(x) = x^4 - 2x^2$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$



2. $f(x) = \ln(1 - 2\cos x)$
   — Domaine de définition : f est définie si $1 - 2\cos x > 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$. Le domaine de définition de f est donc :
   $$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi ; \frac{\pi}{3} 2k\pi \right] \right)$$

— Parité : $\forall x \in D_f,\ -x \in D_f$ et $f(-x) = \ln(1-2\cos(-x)) = \ln(1-2\cos x) = f(x)$ donc f est paire.

— Périodicité : $\forall x \in D_f,\ x+2\pi \in D_f$ et $f(x+2\pi) = \ln(1-2\cos(x+2\pi)) = \ln(1-2\cos x) = f(x)$, donc f est périodique de période 2π.
Du fait de la périodicité et de la parité de f, il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$.

— Limites :

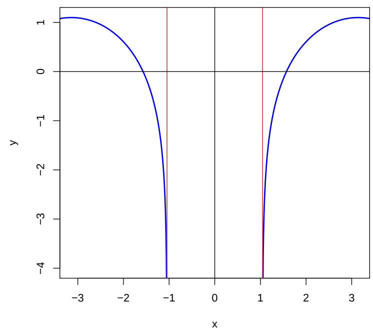
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} (1-2\cos x) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \to \frac{\pi}{3}^+} f(x) = -\infty$$

— Dérivée :

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{2\sin x}{1-2\cos x}$$

— Tableau de variation sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ et représentation graphique sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$:

x	$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x) = \frac{2\sin x}{1-2\cos x}$	‖	$+$	0
$f(x) = \ln(1-2\cos(-x))$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\ln 3$



3. $f(x) = xe^{-x}$

— Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}$.

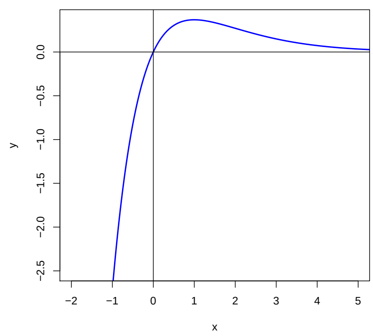
— Dérivée : $\forall x \in D_f,\ f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$.

— Limites en $\pm\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty \quad \lim_{x \to +\infty} = 0$$

— Tableau de variation et représentation graphique sur D_f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x) = e^{-x}(1-x)$		$+$	0	$-$	
$f(x) = xe^{-x}$	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



4. $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$

— Domaine de définition : $D_f = \mathbb{R}^*$

— Limites : Les limites d'une fraction rationnelle dépendent des degrés des polynômes au numérateur et au dénominateur. On a ici :

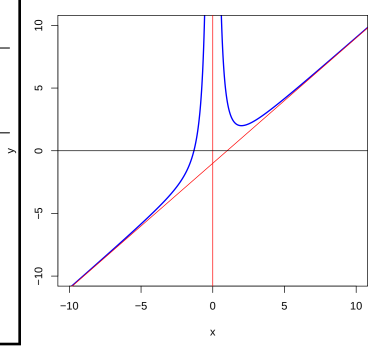
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

— Dérivée : $\forall x \in D_f$, $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^3+4}{x^2} - 1$. D'où $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3}$.

— Asymptotes en $\pm\infty$: $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2} = x - 1 + \frac{4}{x^2}$. On voit immédiatement que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

— Tableau de variation et représentation graphique sur D_f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$



5. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

— Domaine de définition : $f(x)$ est définie pour $\sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0[\pi]$. Le domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}, k \in \mathbb{Z}$.

— Parité : $\forall x \in D_f$, $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\sin^2(-x)} = \frac{\cos x}{(-\sin x)^2} = \frac{\cos x}{\sin^2 x} = f(x)$. f est donc paire.

— Périodicité : $\forall x \in D_f$, $f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x+2\pi)}{\sin^2(x+2\pi)} = f(x)$. f est donc périodique de période 2π. Comme f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur l'intervalle $]0, \pi[$.

— Dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x(\sin^2 x) - \cos x(2\cos x \sin x)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{-\sin^3 x - 2\cos^2 x \sin x}{\sin^4 x} \\ &= -\frac{1}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} \end{aligned}$$

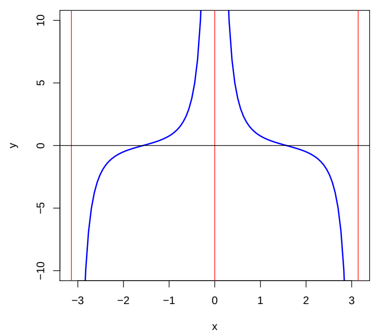
$\forall x \in [0; \pi[$, $\sin x \geqslant 0 \Rightarrow \frac{-1}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x} < 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $]0; \pi[$.

— Limites en 0 et en π :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\infty$$

— Tableau de variation sur $]0;\pi[$ et représentation graphique sur $]-\pi;\pi[$:

x	0		π
$f'(x) = -\frac{1}{\sin x} - \frac{2\cos^2 x}{\sin^3 x}$	$\Vert$	$-$	$\Vert$
$f(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$



6. $f(x) = 8x^3 - 12x^2$

— Domaine de définition : f est définie sur $\mathbb{R}$.

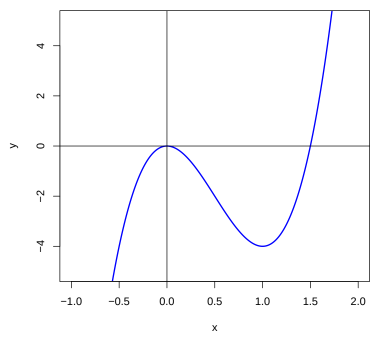
— Dérivée : $f'(x) = 24x^2 - 24x = 24x(x-1)$

— Limites : f est un polynôme de degré 3, ses limites dépendent du coefficient de plus fort degré :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

— Tableau de variation et représentation graphique :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x) = 24x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x) = 8x^3 - 12x^2$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$



7. $f(x) = \dfrac{3x - x^2 - 2}{x^2}$

— Domaine de définition : f est définie pour $x \neq 0$, le domaine de définition est donc $D_f = \mathbb{R}^*$.

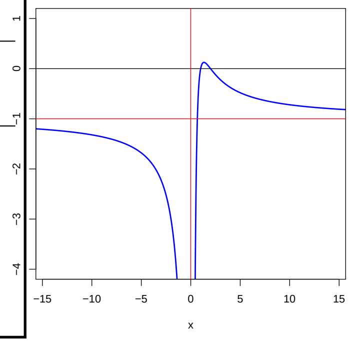
— Limites : $f(x) = \frac{3x-x^2-2}{x^2} = \frac{3x-2}{x^2} - 1$ d'où

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1^- \qquad \lim_{x\to0} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1^+$$

— Dérivée : $f'(x) = \frac{-3x+4}{x^3}$

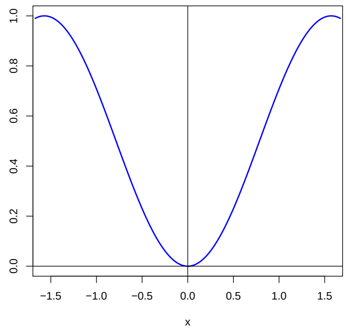
— Tableau de variation et représentation graphique :

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$f'(x) = \frac{-3x+4}{x^3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f(x) = \frac{3x-x^2-2}{x^2}$	-1^-	$\searrow$	$-\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	$f(\frac{4}{3})$	$\searrow$	-1^+



8. $f(x) = \sin^2 x$
   - Domaine de définition : f est définie sur $\mathbb{R}$
   - Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \sin^2 x(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$, donc f est paire.
   - Périodicité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = (\sin(x+\pi))^2 = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = f(x)$. Donc f est périodique de période π. Du fait de la parité et de la périodicité de f, il suffit de l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   - Dérivée : $f'(x) = 2\cos x \sin x$. Sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x)$ est positive.
   - Tableau de variation sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et représentation graphique sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x) = 2\cos x \sin x$		$+$	0
$f(x) = \sin^2 x$	0	$\nearrow$	1



9. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$
   - Domaine de définition : f est définie sur $\mathbb{R}$.
   - Parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} = \frac{\frac{1-e^x}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}} = \frac{1-e^x}{1+e^x} = -f(x)$, donc f est impaire. Il suffit donc de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$.
   - Limite : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 - \dfrac{2}{e^x + 1}$ d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
   - Dérivée : $f'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$, donc f' est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Tableau de variation sur $\mathbb{R}^+$ et représentation graphique :

x	0		$+\infty$
$f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$		$+$	0
$f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$	0	$\nearrow$	1