Exercice : 3-2*
(identifiant : eqtangente-a-3-2)

3-2* () – énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{(2x-1)^2}$$

et C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).
Déterminez f' et f''.
Étudiez la fonction f (limites, variations).
Déterminez une équation de la tangente T au point A d'abscisse a, où $f''(a) = 0$.
Étudiez la position relative de C et T.
Tracez la courbe C ainsi que la tangente T en A.

3-2* () – correction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-2}{(2x-1)^2}$$

1. Dérivées première et seconde de $f(x)$
   — $f'(x)$: dérivée d'un quotient

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3(2x-1)^2 - 4(3x-2)(2x-1)}{(2x-1)^4} \\ &= \frac{3(2x-1) - 4(3x-2)}{(2x-1)^3} \\ &= \frac{5-6x}{(2x-1)^3} \end{aligned}$$

   — $f''(x)$: dérivée de $f'(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-6(2x-1)^3 - 6(5-6x)(2x-1)^2}{(2x-1)^6} \\ &= \frac{24(x-1)}{(2x-1)^4} \end{aligned}$$

2. Étude de la fonction f. L'étude de fonction permet de construire au fur et à mesure le tableau de variation (dernier paragraphe de cette section).

— Variations de $f(x)$. Afin d'étudier les variations de $f(x)$, il faut déterminer le signe de $f'(x)$: $f'(x)$ supérieur à 0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ croissant.
Le signe de $f'(x)$ dépend ici du signe de $(5-6x)$, le numérateur, et du signe de $(2x-1)^3$, le dénominateur.

$$\begin{aligned} 5-6x \geq 0 &\Leftrightarrow x \leq \frac{5}{6} \\ (2x-1)^3 \geq 0 &\Leftrightarrow (2x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \\ f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow x \in]\frac{1}{2};\frac{5}{6}] \end{aligned}$$

— limites de $f(x)$.

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \\ &\lim_{x\to\frac{1}{2}^{\pm}} f(x) = -\infty \end{aligned}$$

— coordonnées de points remarquables.

$f(0) = -2$
$f(\frac{5}{6}) = 1.125$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

— tableau de variations.

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	
$(5-6x)$		+		|	−
$(2x-1)^3$	−	|		+	
$f'(x)$	−	||	+	|	−
variations de $f(x)$	↘	||	↗	|	↘
$f(x)$	−2	$-\infty$	0	1.125	

3. tangente T au point A.

— coordonnées du point A.
Soit A, de coordonnées $(a, f(a))$ tel que $f''(a) = 0$.
Je résous l'équation :

$$f''(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{24(a-1)}{(2a-1)^4} = 0 \Leftrightarrow (a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$f(1) = 1$. Le point A a donc pour coordonnées $(1;1)$.

— Équation de la tangente T.

L'équation de la tangente T au point A de coordonnées $(a, f(a))$ est définie par :

$$\begin{aligned} y - f(a) = f'(a)(x-a) &\Leftrightarrow y - 1 = f'(1)(x-1) \\ &\Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \\ &\Leftrightarrow y = -x + 2 \end{aligned}$$

— Position relative de C et T.

Pour étudier la position relative de C et T, il suffit d'étudier le signe de $f(x) - g(x)$, où $g(x)$ représente l'équation de la tangente. Quand cette différence est positive, cela signifie que C est au-dessus de T.

$$f(x) - g(x) = \frac{3x-2}{(2x-1)^2} - (2-x) = \frac{4(x-1)^3}{(2x-1)^2}$$

Le dénominateur de cette fraction est un carré, donc toujours positif. Le signe de $f(x) - g(x)$ dépend don de celui de $(x-1)$.

- Si $x \geq 1$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$: C est au-dessus de T.
- Si $x \leq 1$ alors $f(x) - g(x) \leq 0$: C est en-dessous de T.

— Traçage de C et T.

Pour tracer facilement la courbe C à main levée, commencez par tracer la tangente, qui est une droite puis placez les points dont vous avez auparavant calculé les coordonnées. Au besoin, placez 1 ou 2 points supplémentaires. Aidez-vous des limites, des sens de variations, des propriétés de la tangente et de sa position relative avec C.