Exercice : 2-6**
(identifiant : edo1lineaires-b-2-6)

2-6** () – énoncé

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' \cos(x) - y \; sin(x) = e^{3x}$
2. $y' - xy = -x$
3. $(1 - x^2)y' - 2xy = 3x^2 - x^4$

2-6** () – correction

1. $y' \cos(x) - y \sin(x) = e^{3x}$
   - Le membre de gauche est la dérivée d'un produit : $(y \cos(x))' = e^{3x}$
   D'où : $y \cos(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + c, c \in \mathbb{R}$ et $y = \frac{1}{\cos(x)}(\frac{1}{3}e^{3x} + c)$

   On peut aussi appliquer la méthode de la variation de la constante :
   - Résolution de l'équation Sans Second Membre :
   $y' \cos(x) - y \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx \Leftrightarrow \ln |y| = \ln |-\cos(x)| + k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = Ke^{\ln |-\cos(x)|}$.
   $y = \frac{K}{\cos(x)}, K \in \mathbb{R}$.

   - Résolution de l'équation Avec Second Membre :
   On fait varier la constante K qui devient une fonction de x :
   $y' = \frac{K'(x)}{\cos(x)} - \frac{-\sin(x)K(x)}{\cos^2(x)} = \frac{K'(x) + K(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$. Alors : $y' \cos(x) - y \sin(x) = K'(x) + \frac{K(x)\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{K(x)\sin(x)}{\cos(x)} = K'(x)$, donc $K'(x) = e^{3x}$ et $K(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
   La solution générale de l'équation est donc : $y = \frac{1}{\cos(x)}(\frac{1}{3}e^{3x} + c)$.

2. $y' - xy = -x$
   - On peut intégrer en séparant les variables : $\frac{dy}{y-1} = x \Leftrightarrow \ln |y - 1| = \frac{1}{2}x^2 + k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 1 + Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K \in \mathbb{R}$

   - On peut aussi utiliser la méthode de la variation de la constante :
   - Résolution de l'équation Sans Second Membre :
   $y' - xy = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = xdx \Leftrightarrow y = Ke^{\frac{1}{2}x^2}, K \in \mathbb{R}$.

   - Résolution de l'équation Avec Second Membre :
   On fait varier la constante K qui devient une fonction de x :
   $y' = K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2} + xK(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$. Alors : $y' - xy = K'(x)e^{\frac{1}{2}x^2}$, donc $K'(x) = -xe^{-\frac{1}{2}x^2}$.
   En intégrant :$K(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} + k, k \in \mathbb{R}$, d'où :$y = 1 + ke^{\frac{1}{2}x^2}$

3. $(1-x^2)y' - 2xy = 3x^2 - x^4$

- Le membre de gauche est la dérivée d'un produit : $((1-x^2)y)' = 3x^2 - x^4$

D'où : $(1 - x^2 y = x^3 - \dfrac{1}{5}x^5 + c, c \in (R)$ et $y = dfracx^3 - \dfrac{1}{5}x^5 + c1 - x^2$

On peut aussi appliquer la méthode de la variation de la constante :

- Résolution de l'équation Sans Second Membre :

$(1-x^2)y' - 2xy = 0 \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{2x}{(1-x^2)}dx.$

$ln|y| = -ln|1-x^2| + C, C \in \Re$, donc $y = \dfrac{K}{1-x^2}$, $K = e^C$.

- Résolution de l'équation Avec Second Membre :

On fait varier la constante K qui devient une fonction de x :

$y = \dfrac{K(x)}{1-x^2}$, et $y' = \dfrac{K'(x)(1-x^2) + 2xK(x)}{(1-x^2)^2}$.

$(1-x^2)y' - 2xy = K'(x) + \dfrac{2xK(x)}{1-x^2} - \dfrac{2xK(x)}{1-x^2} \Leftrightarrow K'(x) = 3x^2 - x^4$, et $K(x) = x^3 - \dfrac{1}{5}x^5 + C, C \in \mathbb{R}$.

La solution générale de l'équation est : $y = \dfrac{x^3 - \dfrac{1}{5}x^5 + C}{1-x^2}$.