Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Contrôle Terminal - Session 1
Vendredi 6 janvier 2017
Durée 120 minutes

Instructions

Ce formulaire sera analysé par lecture optique, toute intervention manuelle rendue nécessaire par le non-respect des règles ci-dessous introduira un délai dans le traitement de votre copie et sera susceptible d'être sanctionnée par un retrait de points.

- Pour sélectionner une case, remplissez la intégralement au stylo en noir : ☐ → ■.
- Pour corriger effacez la case avec du correcteur blanc (ex. Tipp-Ex®).
- N'inscrivez rien dans l'en-tête ou dans les marges des pages.
- Il n'y a qu'une réponse juste pour chaque question.
- Une réponse fausse donne des points négatifs.

Identité

Renseignez les champs ci-dessous et codez votre numéro d'étudiant ci-contre.

Nom et Prénom :

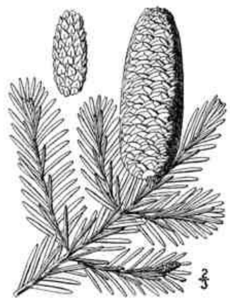
....

Numéro d'étudiant :

....

☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0	☐0
☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1	☐1
☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2	☐2
☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3	☐3
☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4	☐4
☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5	☐5
☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6	☐6
☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7	☐7
☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8	☐8
☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9	☐9

Les quatres parties sont indépendantes.



La chenille de l'épicéa (*Choristineura fumiferana*) est une espèce originaire des forêts d'Amérique du Nord où elle cause de très importants ravages par défoliation lors de ses pullulations.

1 Première partie

L'équation proposée par les premiers auteurs qui ont entrepris une modélisation de la variation de l'effectif cette population, avec l'espoir de la contrôler, est la somme d'une équation logistique classique et d'un terme de prédation par les oiseaux. [1] Si on désigne par $n(t)$ le nombre de chenilles au temps t, alors la dynamique de la population est représentée par l'équation (1) :

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right) - \frac{\left(n(t)\right)^2}{1 + \left(n(t)\right)^2} \tag{1}$$

dans laquelle les deux paramètres r et K sont strictement positifs.

1. Ludwig D, Jones DD, Holling CS. 1978. Qualitative Analysis of Insect Outbreak Systems : The Spruce Budworm and Forest. *Journal of Animal Ecology*, 47 : 315–332.

1.1 Sans limites

En l'absence de prédateurs et sans aucune limitation par l'espace ou les ressources, la dynamique de la population de chenilles peut être simplifiée par l'équation (2) :

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn(t) \tag{2}$$

Question 1 Que représente la quantité $\frac{dn(t)}{dt}$?

☐ La taille de la population de chenilles
☐ Le taux d'accroissement de la population de chenilles
■ La vitesse d'accroissement de la population de chenilles

Question 2 Quelle est la signification du paramètre r ?

☐ La taille de la population de chenilles
☐ La vitesse d'accroissement de la population de chenilles
■ Le taux d'accroissement de la population de chenilles

Question 3 Quelle est la nature de l'équation (2) ?

☐ Une EDO d'ordre 1 homogène
■ Une EDO d'ordre 1 linéaire à coefficients constants sans second membre
☐ Une EDO d'ordre 1 linéaire à coefficients constants avec second membre

Question 4 Pour résoudre l'équation (2), quelle méthode proposeriez-vous ?

☐ La recherche d'une solution particulière
☐ La méthode de variation de la constante
☐ L'intégration par parties
■ La méthode de séparation des variables

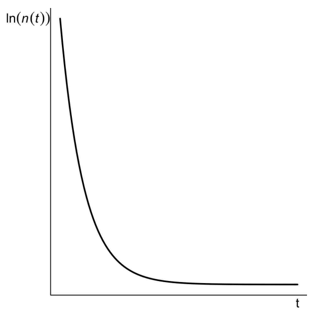
Question 5 On choisit la condition initiale $n(0) = n_0$. Quelle est la solution de l'équation (2) ?

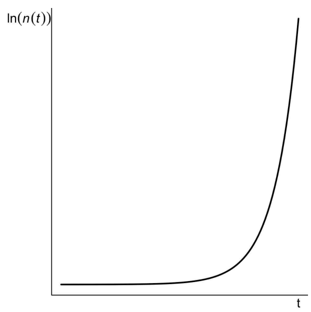
☐ $n(t) = n_0 e^{-rt}$
☐ $n(t) = n_0 - rt$
■ $n(t) = n_0 e^{rt}$
☐ $n(t) = n_0 + rt$

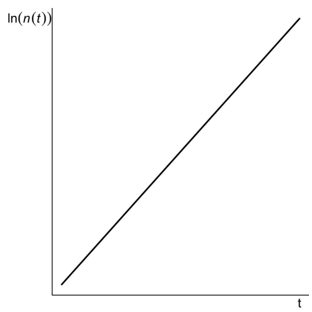
Question 6 Quelle est l'expression du logarithme népérien de $n(t)$?

☐ $\ln(n(t)) = \ln(n_0) - rt$
■ $\ln(n(t)) = \ln(n_0) + rt$
☐ $\ln(n(t)) = n_0 + \ln(rt)$
☐ $\ln(n(t)) = n_0 + rt$

Question 7 Quelle est la représentation graphique de $\ln(n(t))$ en fonction de t ?

☐ 

☐ 

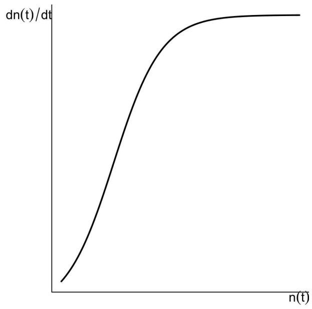
■ 

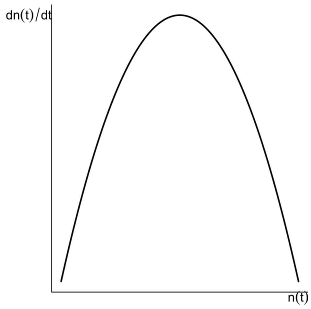
1.2 Espace et ressources limités

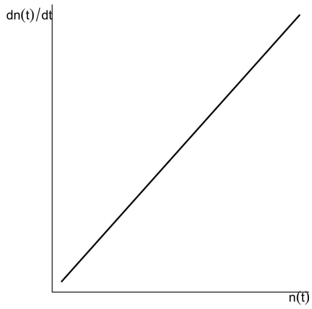
On considère maintenant la partie de l'équation (1) qui correspond à la croissance logistique de la population :

$$\frac{dn(t)}{dt} = rn(t)\left(1 - \frac{n(t)}{K}\right) \tag{3}$$

Question 8 D'après l'équation (3), quelle est la représentation graphique de $\frac{dn(t)}{dt}$ en fonction de $n(t)$?

☐ 

■ 

☐ 

Question 9 D'après l'équation (3), pour quelle valeur de $n(t)$ la quantité $\frac{dn(t)}{dt}$ est-elle maximale ?

- ☐ $\frac{rK}{4}$
- ■ $\frac{K}{2}$
- ☐ $1 - \frac{K}{2}$
- ☐ K

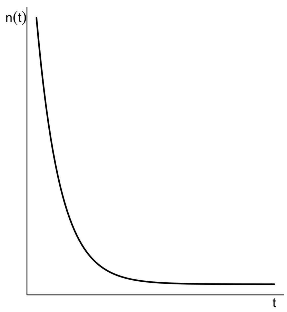
La solution de l'équation (3) s'écrit de la manière suivante :

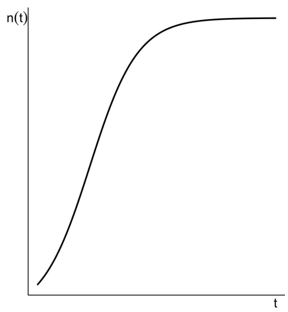
$$n(t) = \frac{Kn_0}{n_0 + (K - n_0)\, e^{-rt}} \tag{4}$$

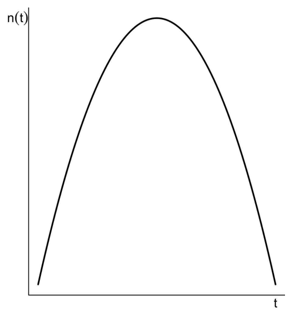
Question 10 D'après l'équation (4), que vaut $\lim\limits_{t \to +\infty} n(t)$?

- ☐ $\frac{K}{2}$
- ☐ $+\infty$
- ■ K
- ☐ $\frac{rK}{4}$

Question 11 D'après (4), quelle est la représentation graphique de $n(t)$ en fonction de t ?

☐ 

■ 

☐ 

1.3 Sous pression des prédateurs

La pression de prédation sur la population de chenilles est décrite par la fonction suivante :

$$p\,(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \tag{5}$$

avec $x = n(t)$ et $x \geq 0$.

Question 12 Que vaut $\lim\limits_{x \to +\infty} p\,(x)$?

☐ $-\infty$ ☐ 0
■ 1 ☐ $+\infty$

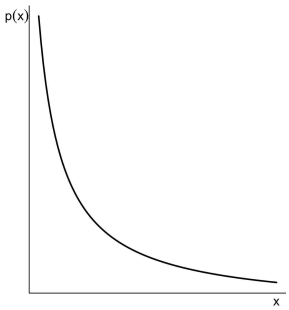
Question 13 Pour quelle valeur de x la dérivée de $p(x)$ s'annule-t-elle ?

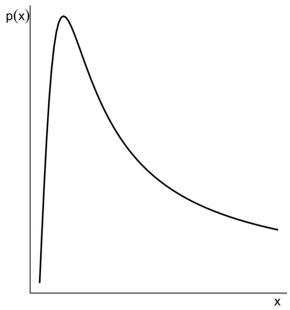
☐ $\frac{dp(x)}{dx} \neq 0$ ■ 0
☐ 1 ☐ $\frac{1}{2}$

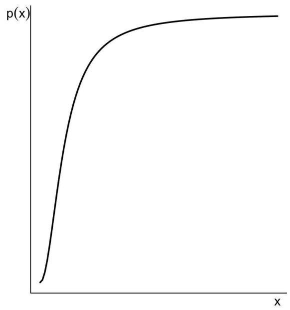
Question 14 Pour quelle valeur de x la fonction de $p(x)$ admet-elle un point d'inflexion ?

☐ $\sqrt{3}$ ■ $\frac{1}{\sqrt{3}}$
☐ 1 ☐ 0

Question 15 D'après l'équation (5), quelle est la représentation graphique de $p(x)$ en fonction de x ?

☐ 

☐ 

■ 

Question 16 Dans un espace limité, avec des ressources limitées et sous la pression des prédateurs, la population peut malgré tout se maintenir à un certain équilibre. Quelle condition mathématique traduit cette situation ?

■ $\frac{dn(t)}{dt} = 0$ ☐ $p(n(t)) = 0$ ☐ $n(t) = K$

2 Deuxième partie

Le développement de l'insecte *Choristineura fumiferana* dépend (comme chez tous les poïkilothermes) de la température du milieu. Des relevés des dates d'émergence des adultes (sortie du papillon de la chrysalide) dans une population naturelle ont été effectués chaque année pendant $n = 36$ ans. Chaque année on calcule la date médiane d'émergence des adultes, d, ce qui constitue la variable statistique étudiée. On calcule : $\bar{d} = 190$ j (soit le 190e jour de l'année à partir du 1er janvier) et $\hat{\sigma} = 60$ j (respectivement, la moyenne de l'échantillon et l'estimation de l'écart-type de la population).

Question 17 À quelle quantité est égale l'estimation ponctuelle, $\hat{\mu}$, de d pour cette population ?

- ☐ la moyenne μ de la population
- ■ la moyenne $\bar{d}$ de l'échantillon
- ☐ $\frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$
- ☐ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$

Question 18 À quelle quantité est égale l'estimation ponctuelle de la variance, $\hat{\sigma^2}$, de la population ? On note s^2 la variance de l'échantillon.

- ☐ la variance σ de la population
- ☐ $\frac{n-1}{n}s^2$
- ☐ la variance s^2 de l'échantillon
- ■ $\frac{n}{n-1}s^2$

Question 19 Quel est l'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %, c'est à dire avec un risque de première espèce $\alpha = 0,05$, de $\hat{\mu}$?

- ☐ $[150,4\ ;\ 229,6]$
- ☐ $[160,4\ ;\ 219,6]$
- ☐ $[180,4\ ;\ 219,6]$
- ■ $[170,4\ ;\ 209,6]$

Question 20 Interprétation biologique de l'intervalle de confiance :

- ■ l'intervalle de confiance a 95 % de chance de contenir la valeur moyenne de d pour la population
- ☐ l'intervalle de confiance a 5 % de chance de contenir la valeur moyenne de d pour l'échantillon
- ☐ l'intervalle de confiance a 5 % de chance de contenir la valeur moyenne de d pour la population
- ☐ l'intervalle de confiance a 95 % de chance de contenir la valeur moyenne de d pour l'échantillon

D'après un modèle mathématique (dit modèle des degrés jours) intégrant le nombre de jours présentant une température moyenne supérieure au seuil thermique de développement de l'insecte, on prédit que la date moyenne théorique d'émergence des adultes est égal à $\mu_0 = 193$ (soit le 193e jour de l'année à partir du 1er janvier). Ce paramètre est considéré comme étant la moyenne connue d'une population théorique. On désire savoir si la date moyenne d'émergence des adultes estimée précédemment sur les 36 années de relevés est conforme à celle prédite par le modèle.

Question 21 À quelle formulation l'hypothèse nulle, H_0, correspond-t-elle :

- ■ H_0 : les moyennes des deux populations sont égales
- ☐ H_0 : la moyenne de la population est différente de celle de la population
- ☐ H_0 : la moyenne de la population est égale à celle de l'échantillon
- ☐ H_0 : les moyennes des deux populations sont différentes

Question 22 À quelle formulation l'hypothèse alternative, H_1, correspond-t-elle :

- ☐ H_1 : les moyennes des deux populations sont égales
- ☐ H_1 : la moyenne de la population est différente de celle de la population
- ☐ H_1 : la moyenne de la population est égale à celle de l'échantillon
- ☐ H_1 : la moyenne de la population naturelle est inférieure celle de la population théorique
- ☐ H_1 : la moyenne de la population naturelle est supérieures celle de la population théorique
- ■ H_1 : les moyennes des deux populations diffèrent

Question 23 Quelle est la valeur de la statistique observée :

☐ $1,96$ ☐ $0,8$ ☐ 10 ■ $0,3$

Question 24 En utilisant un risque de première espèce $\alpha = 0,05$, quelle est la bonne conclusion ?

- ☐ la durée moyenne d'émergence de la population d'insectes étudiée est conforme à la moyenne théorique du modèle et le risque associé à cette conclusion est égal à $\beta = 0,95$
- ■ la durée moyenne d'émergence de la population d'insectes étudiée est conforme à la moyenne théorique du modèle et le risque associé à cette conclusion est égal à β inconnu
- ☐ la durée moyenne d'émergence de la population d'insectes étudiée n'est pas conforme à la moyenne théorique du modèle et le risque associé à cette conclusion est égal à β inconnu
- ☐ la durée moyenne d'émergence de la population d'insectes étudiée est conforme à la moyenne théorique du modèle et le risque associé à cette conclusion est égal à $\alpha = 0,05$

3 Troisième partie

La masse individuelle (en mg) des chenilles (notée x) a été mesurée sur deux échantillons prélevés dans deux populations de *Choristineura fumiferana*. On donne les résultats suivants :

Population 1 $n_1 = 20$ $\sum_{i=1}^{n_1} x_i = 1862,3$ $\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 = 315394,2$

Population 2 $n_2 = 20$ $\sum_{i=1}^{n_2} x_i = 2005,5$ $\sum_{i=1}^{n_2} x_i^2 = 268269,3$

Question 25 À quelle valeur est égale la moyenne de l'échantillon 1 ?

☐ $100,3$ mg ☐ $1862,3$ mg ☐ $447,8$ mg ■ $93,1$ mg

Question 26 Pour calculer la variance de l'échantillon 1, quelle formule utilisez-vous ?

☐ $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2) - \bar{x}$ ☐ $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1} x_i) - \bar{x}^2$ ■ $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2) - \bar{x}^2$ ☐ $\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - \bar{x}^2)$

On désire savoir si la masse moyenne des chenilles varie entre les deux populations d'insectes (test bilatéral).

Question 27 À quelle formulation l'hypothèse nulle, H_0, correspond-t-elle ?

☐ H_0 : les moyennes des deux échantillons sont différentes
☐ H_0 : les moyennes des deux échantillons sont égales
☐ H_0 : les moyennes des deux populations sont différentes
■ H_0 : les moyennes des deux populations sont égales

Question 28 À quelle formulation l'hypothèse nulle, H_1, correspond-t-elle ?

☐ H_1 : les moyennes des deux échantillons sont différentes
☐ H_1 : les moyennes des deux échantillons sont égales
☐ H_1 : les moyennes des deux populations sont égales
■ H_1 : les moyennes des deux populations sont différentes

Question 29 Quelles sont les conditions à respecter pour réaliser ce test d'égalité des deux moyennes ?

☐ distribution normale de la masse des adultes, effectifs théoriques supérieurs à 5 et variances égales
■ échantillonnage aléatoire simple, distribution normale de la masse des adultes et homoscédasticité
☐ échantillonnage aléatoire simple, distribution anormale de la masse des adultes et hétéroscédasticité
☐ échantillonnage aléatoire simple, distribution selon la loi du χ^2 de la masse des adultes et homoscédasticité

Question 30 En supposant les conditions d'applications du test vérifiées, peut-on conclure avec un risque de première espèce $\alpha = 0,02$ que :

■ la masse moyenne des adultes n'est pas différente entre les deux populations et cette conclusion se fait avec un risque β inconnu
☐ la masse moyenne des adultes est différente entre les deux populations et cette conclusion se fait avec un risque $\beta = 0,98$
☐ la masse moyenne des adultes est différente entre les deux populations et cette conclusion se fait avec un risque $\alpha = 0,02$
☐ la masse moyenne des adultes est différente entre les deux populations et cette conclusion se fait avec un risque β inconnu

4 Quatrième partie

On s'intéresse à la répartition des chenilles de *Choristineura fumiferana* sur les rameaux d'un épicéa. A partir d'un échantillon prélevé sur cet arbre on obtient le nombre de chenilles par rameau. On désire savoir si la répartition des chenilles est conforme à celle prédite sous l'hypothèse d'une loi de Poisson. Les données de l'échantillonnage sont indiquées dans le tableau suivant :

Nombre de chenilles/rameau	Nombre observé de rameaux	Nombre théorique de rameaux
0	1043	927,24
1	172	333,84
2	78	60,07
≥ 3	36	7,85

Question 31 Par quelle quantité le paramètre λ de la loi de Poisson est-il estimé ?

- ☐ l'estimation de la probabilité pour qu'un rameau ait au moins une chenille
- ☐ l'estimation du nombre moyen de rameau par chenille
- ☐ l'estimation de la probabilité pour qu'un rameau ait au plus une chenille
- ☐ l'estimation de la probabilité pour qu'un rameau ait une chenille
- ■ l'estimation du nombre moyen de chenilles par rameau

Question 32 Quelle loi suit la statistique du test sous l'hypothèse nulle ?

☐ loi binomiale ■ loi du χ^2 ☐ loi normale ☐ loi de Poisson

Question 33 Quelle est la valeur de la statistique calculée ?

☐ 3,84 ☐ 56,12 ☐ 20,34 ■ 199,21

Question 34 Quelle est la valeur de la statistique théorique ($\alpha = 0,05$) ?

☐ 1,96 ■ 5,99 ☐ 10,20 ☐ 3,84

Question 35 Quelle conclusion tirez-vous du test d'ajustement ($\alpha = 0,05$) ?

- ☐ le nombre de chenille par rameau ne suit pas une loi binomiale
- ■ le nombre de chenille par rameau ne suit pas la loi de Poisson considérée
- ☐ le nombre de chenille par rameau ne suit pas une loi normale
- ☐ la fluctuation d'échantillonnage peut à elle seule expliquer les écarts entre les effectifs observés et les effectifs théoriques

Question 36 Quel est le risque associé à cette conclusion ?

☐ β inconnu ☐ 0,02 ☐ 0,95 ■ 0,05